Potenzen

mit negativen ganzzahligen Exponenten

Vereinfache und fasse zusammen:

1. $\left(-3\right)^{-5} : \left(-3^{-8}\right) =$

2. $-\left(\frac{81}{36}\right)^{-7k} : \left(-\frac{2}{3}\right)^{2k+1} =$

3. $\left(x^{0}\right)^{m} \cdot \left(x \cdot x^{m}\right)^{1-m} =$

4. $\left(\frac{\left(ab\right)^{-3}}{a^{-3} - b^{-3}}\right)^{-2} =$

5. $\frac{a^{-4}b^{-4m-3}\left(-c\right)^{5}}{\left(abc\right)^{-2}} : \left(-\frac{2^{-4}a}{b^{-2m}c^{-3}}\right)^{-2} =$

6. $\frac{3b - b^{k+2}}{b^{k+1}} - \frac{2 - b^{k-1}}{b^{k-2}} =$

7. $\frac{\left(-a\right)^{-5}c^{-2m-1}}{a^{-1}\left(-b\right)^{2m-4n}} : \left(\frac{c^{-m}}{a^{2}b^{2n-m}}\right)^{2} =$

8. $\left(\frac{y^{k-1} \cdot 4^{k}}{a^{-2k+1} \cdot \left(-b\right)^{-2k}}\right)^{-3} : \left(\frac{y^{-3}}{64a^{5}b^{3}}\right)^{k} =$

9. $\left[-\left(a-1\right)^{3} b^{-6}\right]^{-3k-1} =$

10. $\frac{1 - x^{-1} + x^{-2}}{1 - \frac{1 - x^{-1}}{1 - \left(1 - x^{-1}\right)^{-1}}} =$

Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Lösungen ohne Lösungsweg

1. 27

2. $1{,}5\left(\frac{2}{3}\right)^{12k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-12k+1}$

3. x^{1-m^2}

4. $\left(b^3 - a^3\right)^2$

5. $-\frac{b^5 \cdot c^{13}}{2^8}$

6. $\left(3 - 2b^2\right) \cdot b^{-k}$

7. $-c^{-1} \cdot b^{8n-4m}$

8. $a^{-k+3} \cdot b^{-3k} \cdot y^3$

9. $-\left(a-1\right)^{-3(3k+1)} \cdot b^{6(3k+1)}$

10. x^{-1}

Potenzen

Potenzen mit rationalen Exponenten

Vereinfache und fasse zusammen:

1. $\left[(a-3)^6 b^{12}\right]^{-\frac{1}{6}} =$

2. $2^{1+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} =$

3. $\left(x^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1} =$

4. $\left[(2x-3)^6\right]^{\frac{1}{6}} =$

5. $\dfrac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{(8x+4)^{\frac{1}{2}}} =$

6. $\left[\left(\dfrac{w}{v^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} : \left(v^{1,4} \cdot w^{-4}\right)\right]^{-\frac{5}{4}} =$

7. $\left[\left(x^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(x^{-1,5}\right) \cdot \left(xy^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^3 =$

8. $\left(8x^{-1}\sqrt{x^3 y^{-\frac{2}{3}}} - 12y^{-1}\sqrt{x\sqrt[3]{y^4}}\right)xy =$

9. $\dfrac{x^{-\frac{1}{4}}b - x^{-\frac{1}{4}}a}{bx^{-\frac{1}{4}} + \left(4abx^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{4}}a} =$

10. $\dfrac{a^{-\frac{6}{5}}-b^{-\frac{6}{5}}}{b^{-\frac{3}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}}=$

11. $\dfrac{\left(64x^{\frac{3}{8}}y^{-\frac{3}{5}}z^{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(125x^{-\frac{15}{16}}y^{\frac{3}{10}}z^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}}=$

12. $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{y-x^{\frac{2}{3}}}=$

13. $\dfrac{\left(8x^{-\frac{9}{4}}y^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{16}x^{\frac{2}{3}}y^{-2}\right)^{\frac{3}{4}}}=$

14. $\dfrac{y^{\frac{1}{2}}\left(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}-y}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{y+2y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}=$

15. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{ax}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}}:\sqrt[15]{\frac{x}{a^{4}}}=$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Lösungen ohne Lösungsweg

1. $(a-3)^{-1}b^{-2}$

2. 4

3. x^2

4. $2x - 3$

5. $x + 0{,}5$

6. $w^{-\frac{35}{6}} \cdot v^{\frac{4}{3}}$

7. $x^{-4} \cdot y^3$

8. $-4x^{1{,}5}y^{\frac{2}{3}}$

9. $\dfrac{b-a}{\left(a^{0{,}5}+b^{0{,}5}\right)^2}$

10. $-a^{-\frac{3}{5}} - b^{-\frac{3}{5}}$

11. $100x^{-0{,}5}$

12. $-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}}$

13. $2xy^{-0{,}5}$

14. -1

15. $a^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{6}}$

Potenzen - Gemischte Aufgaben

Vereinfachen Sie unter der Voraussetzung, dass alle Variablen aus $\mathbb{R}^+$ sind:

1. $\sqrt{a^{-2}\sqrt[3]{b\sqrt{a^{-3}b^{-2}}}} =$

2. $\left[\left(\frac{12\cdot(-a)^3}{15x^{m+1}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-4a^3}{5x^m}\right)^3\right]:\left[\left(\frac{a^{-1}}{20x^{-m}}\right)^{-3}:\left(\frac{40}{x^m a^{-3}}\right)^2\right] =$

3. $\left(\sqrt[4]{\frac{bc^3}{a^2}}\cdot\frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{b^5c}}\right):\left(\sqrt[3]{\frac{ac}{b}}\right) =$

4. $\sqrt[3]{\frac{z}{xy}}:\sqrt[4]{\frac{y^2}{x^3z}}\cdot\frac{\sqrt[3]{y^2\sqrt{y}}}{\sqrt[6]{xz^5}} =$

5. $\left(\frac{2^{2n+1}\cdot 3^{2n}}{3^3\cdot 2^{-n+1}}:\frac{2^{4n}3^{-n}}{3^{n+5}\cdot 2^{3n+1}}\right)^{\frac{1}{2n+1}} =$

6. $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{4b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}} - 3b\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}\sqrt{a^{-3}\sqrt{ab}}} =$

7. $\left(\frac{ab^{n-1}x^m}{y^{2n}\cdot c^4}\right)^3:\left(\frac{y^{n-1}a^0c^2}{x^{1-m}a^2}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{x^4}{a^{1-n}\cdot c^2}\right)^{-2}:\left(\frac{a^{2n}y^{5n+2}}{b^{3n}\cdot x^{4m-12}}\right) =$

8. $\left(a^{m+3}+d^{-p+1}\right)\left(a^{-m-1}+d^{p+1}\right)-\frac{d^{1-p}}{a^{m+1}}-2a^3d^3\left(a^{-2}d^{-2}+\frac{a^m d^{p-2}}{2}\right) =$

9. $\frac{y^{3n+1}-2y^{3n}+y^{3n-1}}{y^{2n+1}-y^{2n-1}} =$

10. $\frac{x^2-4}{x^{2n+1}}-\frac{x-1}{x^{2n-1}}-\frac{2x^5}{x^{2n+4}} =$

11. $\left(-a^3\right)^{-2}\cdot\left(\frac{b^{m-3}\cdot c^2}{b^{-1+m}}\right)^2:\left(\frac{c^3}{b^{-2}a^{-3}}\right)^{-2}+\left(c^{-5}b^0\right)^{-2} =$

Potenzen - Gemischte Aufgaben

Lösungen ohne Lösungsweg

1. $a^{-\frac{5}{4}}$

2. $-0{,}16a^6 x^2$

3. $\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{c}{b}}$

4. $\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{x}{z}}$

5. 18

6. $5a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}}$

7. $a^{-3-4n} \cdot b^{6n-3} \cdot x^{11m-24} \cdot y^{-7n-6}$

8. $(a - d)^2$

9. $y^n \cdot \frac{y-1}{y+1}$

10. $\frac{-4-x^3}{x^{2n+1}}$

11. $2c^{10}$

Potenzgleichungen

Bestimme jeweils die Lösungsmenge:

1. $2 - x^{\frac{1}{3}} = 1{,}25$

2. $x^{\frac{5}{2}} = 8^{\frac{10}{3}}$

3. $x^{1{,}5} - 10 = \frac{1}{8}\left(10^3 + 3x^{1{,}5}\right)$

4. $\left(x^{-\frac{5}{2}} - 7\right)^{-\frac{1}{2}} = 0{,}2$

5. $\left(\sqrt{3}x\right)^{\frac{4}{3}} - 33 = -8\left(\sqrt{3}x\right)^{\frac{2}{3}}$

6. $(x-2)^{\frac{1}{3}} - (x-2)^{\frac{1}{6}} = 6$

7. $\left(81x^{-\frac{3}{2}} + 729\right)^{-\frac{1}{2}} = 0{,}5 \cdot 3^{-3}$

8. $2 = \left(17 - 3\sqrt{5x-1}\right)^{\frac{1}{3}}$

9. $x^{\frac{3}{2}} - 25 = \frac{1}{11}\left(8x^{1{,}5} + 100\right)$

10. $30 \cdot \sqrt[6]{(x-3)^5} = \sqrt[3]{(x-3)^5} - 64$

11. $\left(4x^{\frac{4}{3}} + 17\right)^{\frac{3}{2}} = 9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$

12. $32(3-x)^{-\frac{10}{3}} + 127(3-x)^{-\frac{5}{3}} = 4$

13. $\left(4x^{\frac{4}{3}} + 16\right)^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = 0$

Potenzgleichungen
Lösungen ohne Lösungsweg

1. $\left\{\frac{27}{64}\right\}$

2. $\{16\}$

3. $\{36\}$

4. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

5. $\{3\}$

6. $\{731\}$

7. $\{3^{-2}\}$

8. $\{2\}$

9. $\{25\}$

10. $\{67\}$

11. $\{8\}$

12. $\{-5\}$

13. $\{0\}$

Exponenzialgleichungen - Teil 1

Klasse 10

Bestimme jeweils die Lösungsmenge: $\mathbb{G} = \mathbb{R}$

1. $2^{5x} = 8 \cdot 4^{x-1}$

2. $3^{x+1} \cdot 7^{x} = 81$

3. $9^{2x} = 9 \cdot 5^{1-x}$

4. $5^{x+1} = 2^{x} \cdot 7^{2x}$

5. $3^{2x+3} - 9^{x+2} + \left(\sqrt{3}\right)^{4x+10} = 63$

6. $2^{6x-5} + 3 \cdot 4^{3x-2} - 8^{2x-1} = 384$

7. $\sqrt[x]{8^{3x+1}} = \sqrt[2x]{4^{x+2}}$

8. $\left(\frac{4}{5}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{6}{7}\right)^{x+2}$

9. $6^{x} + 6^{2x} = 56$

10. $\left(9^{2x-3}\right)^{3x-4} = 81$

11. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}$

12. $5^{x+5} - \left(\frac{1}{3}\right)^{1-3x} = 0$

13. $2^{4x-2} + 4^{2x-3} = 5^{2-x}$

14. $3 \cdot 2^{4x+3} - 20 \cdot 4^{2x-1} = 3 \cdot 5^{-x}$

15. $11^{2x-7} \cdot 2^{x} = 3^{1-x}$

16. $2^{2x+5} - 3 \cdot 2^{x+2} = -1$

17. $3^{2x+1} + 5 \cdot 4^{x+2} = 8 \cdot 2^{2x-1} + 18 \cdot 9^{x+1}$

18. $2 \cdot 5^{x} - 4^{0,5} \cdot 5^{-x+1} = 0,25^{-1,5}$

Exponenzialgleichungen - Teil 1

Klasse 10

19. $20\cdot 3^{x-3}+3^{x}+129\cdot 3^{x-4}-3^{5}=3^{x-1}$

20. $4^{\left(x^2\right)}=2\sqrt{2^{17x}}-\left(\sqrt{0{,}5}\right)^{-17x}-\frac{3}{4}\cdot 32^{1{,}7x}$

21. $2\left(5+2^{x}\right)=\left(\frac{1}{9}\right)^{-1{,}5}-2^{-x+3}$

22. $\left(10^{x+2}\right)^{2}=\left(2^{x+10}\right)^{10}$

23. $\sqrt{8^{2x}+4}+\sqrt{2\cdot 8^{2x}}=14$

24. $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{11x+9}{x}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x}}$

25. $\frac{2^{2x}\cdot 10^{x+3}}{4^{2x+1}\cdot 5^{2(x-1)}}=\frac{1}{4}\cdot 2{,}5^{x-3}$

26. $2^{x-1}\cdot 3^{2x+2}=5^{3x-3}:7^{4x-4}$

27. $\left(10^{x+2}\right)^{x}=\left(2^{x+10}\right)^{x}$

28. $5^{x}\cdot\sqrt[x-1]{4^{x}}=1000$

29. $1000\cdot 4^{x}+100\cdot 10^{x}=25^{x}$

30. $8\cdot 9^{x-3}=3\cdot 6^{\frac{2x+5}{x}}$

31. $3^{\lg\left(x^2\right)}+\frac{1}{18}\cdot 6^{2+\lg x}=12\cdot 4^{1+\lg x}$

32. $2^{\left(3^{x}\right)}=3^{\left(4^{x}\right)}$

Exponenzialgleichungen - Teil 1

Klasse 10

Ergebnisse

(ausführliche Lösungen in GM_LU011)

1.	$\left\{\frac{1}{3}\right\}$	**2.**	$\{1{,}0825...\}$
3.	$\{0{,}63403...\}$	**4.**	$\{0{,}5409...\}$
5.	$\{-0{,}5\}$	**6.**	$\{2\}$
7.	$\left\{-\frac{1}{8}\right\}$	**8.**	$\{1{,}06432...\}$
9.	$\{1{,}086...\}$	**10.**	$\left\{2;\ \frac{5}{6}\right\}$
11.	$\{3\}$	**12.**	$\{5{,}42327...\}$
13.	$\{1{,}03709...\}$	**14.**	$\{-0{,}42123...\}$
15.	$\{2{,}7148...\}$	**16.**	$\{-2;\ -3\}$
17.	$\{-0{,}91027...\}$	**18.**	$\{1\}$
19.	$\{4\}$	**20.**	$\{0{,}25;\ 4\}$
21.	$\{-1;\ 3\}$	**22.**	$\{-25{,}83688...\}$
23.	$\left\{\frac{5}{6}\right\}$	**24.**	$\{0{,}072297...\}$
25.	$\{4\}$	**26.**	$\{0{,}24826...\}$
27.	$\{0;\ 1{,}44541...\}$	**28.**	$\{3;\ 1{,}4307...\}$
29.	$\{5{,}1215...\}$	**30.**	$\{5;\ -0{,}8155...\}$
31.	$\{26243{,}55...\}$	**32.**	$\{-1{,}6009...\}$

Exponentialgleichungen - Ungleichungen

Ermittle jeweils die Lösungsmenge: $\mathbb{G} = \mathbb{R}$

1. $\left(\frac{5}{6}\right)^{n} < 10^{-6}$

2. $3^{\log_5 x} > 5^{\log_3 x}$

3. $5^{x} < 2^{12-5x}$

4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \leq 2^{2x+3}$

5. $5^{2x} - 5^{x+1} + 6 < 0$

6. $2^{x} \geq 2\left(1 + 2^{-x}\right)$

7. $1 + 3^{1-x} + 2 \cdot 3^{-2x} > 0$

Exponentialgleichungen - Ungleichungen
Lösungen ohne Lösungsweg

1. $]75{,}7755...;\ \infty[$

2. $]0;\ 1[$

3. $]-\infty;\ 1{,}63891...[$

4. $]-0{,}93426...;\ \infty[$

5. $]0{,}43068...;\ 0{,}68261...[$

6. $]1{,}44998...;\ \infty[$

7. $\mathbb{R}$

Logarithmusgleichungen - mit 1 Unbekannten

Bestimme jeweils die Lösungsmenge: $\mathbb{G} = \mathbb{R}$

Gib gegebenenfalls die Definitionsmenge an !
(Beachte: log (T(x)) nicht def. für T(x) ≤ 0)

1. $\log_3 x = -3$

2. $\lg\left(x^{64}\right) = -2$

3. $\lg\sqrt{6x+4} = 1{,}5$

4. $\lg(3x-2) = -1$

5. $\lg x = 3 - \frac{1}{2}\lg x$

6. $2\lg x - \lg(4x-4) = 0$

7. $\frac{1}{\lg x} + 0{,}5 = \frac{1}{2}\lg x$

8. $\log_5 2 + \log_5 (x-9) + 1 = \log_5 x$

9. $\lg\frac{10^{10}}{\sqrt[10]{10 \cdot \sqrt[10]{10}}} = x$

10. $\log_3 (x+4) - \log_3 x - 2 = 0$

11. $(\lg x)^2 - \lg x - 6 = 0$

12. $2(\lg x)^2 - 5\lg x - 3 = 0$

13. $x^{1+\lg x} = 10^2$

14. $x^3 = 10 \cdot x^{1+\lg x}$

15. $10x^2 = x^{3+2\lg x}$

16. $\lg\left(x^{\lg x}\right) = 9$

17. $(100x)^{\lg x} = 1000$

18. $x^{\lg x} = 10^4$

19. $(\lg x)^2 - \lg x = 0{,}75$

20. $\log_2 5 + \log_2 x - \log_2\left(1 + x^2\right) = 1$

21. $\log(x+2) + \log x - \log 3 = 0$

22. $\lg(4x) + \lg\dfrac{x}{5} = 1 + \lg 2$

23. $\dfrac{2}{6 - \log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 x} = 1$

24. $\lg\left(x^2 - 3\right) + \lg\left(x^2 + 3\right) = 2\lg x + \lg 8$

25. $2\log_3\sqrt{x+5} + \log_3(x+3) = 2 + \log_3(2x-1)$

26. $\lg(x+1) - 2\lg x = \lg 6$

27. $\log_x 2 + \log_x 3 = \log_{2x} 4$

28. $2\log_2 x - 4\log_2 x + 1 = 0$

29. $\log_2(x+3) + \log_2(x-2) = 1 + \log_2 x$

30. $\log_x 5 + \log_5 x = 4$

31. $(2x-1)^{\lg(2x-1)} = (x-0{,}5)^2$

32. $\dfrac{\ln(3-x) - 0{,}5\ \ln x}{\ln(x-1)} = 0{,}5$

33. $\left[x^{\lg\left(\frac{10}{x}\right)}\right]^2 = \dfrac{100}{x^2}$

34. $\log_3(x-2) + \log_9\left(x^2\right) = 1$

35. $0{,}5 \cdot \lg(x-7) + \lg\sqrt{2} = 1 - \lg\sqrt{x-2}$

36. $0{,}5\log_{\sqrt{5}}(x+2) = 2\log_5(3x) - \log_5(2x+1)$

37. $\left(x^{(\lg x-3)}\right)^2=\frac{1}{1000}x$

38. $\left(x^{\lg(x-2)}\right)^{\lg x}=x^{\lg(x-2)}\cdot(x-2)^2$

39. $(\lg 3)^{\lg x}=\frac{1}{3}\cdot x^{\lg 3}$

40. $\lg(3x)-\lg x^2+\lg 2^{\lg(3x)}=1{,}5$

Logarithmusgleichungen - Ungleichungen

Ermittle jeweils die Lösungsmenge: $\mathbb{G} = \mathbb{R}$

1. $\log_2 x > 3$

2. $\log_3 (2x - 3) > 4$

3. $-2{,}5 \leq \lg x \leq -1$

4. $0{,}5 < \lg(3x) < 1{,}5$

5. $2\log_8 x > 4\log_8 x + 1$

6. $\log_3 x + \log_3 (8 - 5x) > 1$

7. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2+\lg x} \geq 2^{1-\lg x}$

8. $\lg|x| \geq 2$

9. $|\lg x| \leq 0{,}1$

10. $\lg|x - 5| \leq -0{,}5$

Gymnasium / Realschule

Definitionsmenge bestimmen

Klassen 9 - 11

Bestimme die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_{max}$ für folgende Funktionen:

1. $x \mapsto x^3 - 2x$

2. $x \mapsto \dfrac{5}{x^2 + \sqrt{2}}$

3. $x \mapsto \dfrac{3}{x - 2}$

4. $x \mapsto \dfrac{2}{x^2 - 2}$

5. $x \mapsto \dfrac{6x^2 - 2x}{3x + 4}$

6. $x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 8}{x^2 + x - 6}$

7. $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{Z}^+$

8. $x \mapsto |x| - 3$

9. $x \mapsto |x - 12\sqrt{3}| - 1$

10. $x \mapsto \dfrac{1}{|x| - 2}$

11. $x \mapsto \dfrac{3}{x + |x|}$

12. $x \mapsto \dfrac{1}{5x - 2} + \dfrac{3x}{x + 6}$

13. $x \mapsto -\sqrt{x}$

14. $x \mapsto \sqrt{-x}$ oder $x \mapsto -\sqrt{-x}$

15. $x \mapsto \sqrt{|x|}$

16. $x \mapsto \sqrt{-x^2}$

17. $x \mapsto \dfrac{1}{x^{-n}}$ mit $n \in \mathbb{Z}^+$

18. $x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$

19. $x \mapsto \dfrac{2^{-x}}{x^2 + 1}$

20. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{3x + 6}{4x + 2}}$

21. $x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 20}$

22. $x \mapsto \dfrac{6}{\sqrt{9 - (x - 3)^2}}$

Allgemeines: Die maximale Definitionsmenge ist immer $\mathbb{R}$. Nur dort, wo der Nenner eines Bruches Null werden könnte, oder wo der Radikand einer Wurzel negativ werden könnte, müssen die entsprechenden Zahlenbereiche bestimmt und von $\mathbb{R}$ ausgeklammert werden.

Ungleichungen mit Beträgen

Klassen 7 - 11

Gib die Lösungsmenge in der Grundmenge $\mathbb{R}$ an:

1. $|x| < 4$

2. $|x| > 4$

3. $|x - 2| \leq 4$

4. $|x - 3| \geq 7$

5. $|x + 5| < 1$

6. $3 \leq |2x| \leq 5$

7. $x + |3x| < 6$

8. $|x^2 + 2| > 6$

9. $\dfrac{|5-2x|}{-4} \geq x + 2$

Bruchgleichungen mit Variablen

Klasse 7 - 9

Ermittle jeweils die Lösungsmenge für x mit D = $\mathbb{Q}$.
Führe wo notwendig eine Fallunterscheidung durch um den Gültigkeitsbereich der Variablen zu bestimmen.

1. $\frac{x}{p}+1=\frac{q}{p}$

2. $b-\frac{a}{x}=c$

3. $\frac{c}{bx}-\frac{c}{ax}=1$

4. px - q = qx + p

5. b - ax = a - bx

6. px - pq = pr - px

7. cx - d = x

8. ax - bx = cx

9. $r^2 + sx = s^2 - rx$

10. $\frac{x}{q}-r=\frac{x}{p}$

11. $\frac{x}{a}-x=b$

12. $\frac{x}{m}-\frac{x}{n}=m-n$

13. 5(a - x) = 3(b - x)

14. x(a - b) = a(b - x)

15. pq - r(x + s) = (x - r)s

16. (p + x)(q + x) = (p - x)(q - x)

17. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=2$

18. $\frac{x-a}{bc}-\frac{x+c}{ab}=\frac{2(b-c)}{ab}-\frac{x+b}{ac}$

19. $\frac{x}{a-b}=\frac{x-b}{a}$

20. $\frac{px-q}{p-q}=\frac{px}{p+q}$

21. $\frac{x+1}{x-1}=\frac{a}{b}$

22. $\frac{x-1}{x+a}+\frac{x+1}{x-b}=2$

23. $\frac{m-n}{x}-\frac{1}{m+n}=\frac{m+n}{x}-\frac{1}{m-n}$

24. $\frac{1}{m^2+mp}-\frac{px-p^2}{m^2x+mpx}=\frac{1}{mx}-\frac{1}{mp+p^2}$

25. $\frac{b}{ax+a^2}-\frac{1}{b}+\frac{x+a}{bx-ab}-\frac{6a^2+3b^2+ax}{bx^2-a^2b}=0$

26. $\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+a}{x-a}=2$

27. $\frac{a-1}{2x-a}+\frac{a+2}{2x+a}=\frac{4a^2-a}{4x^2-a^2}$

28. $\frac{a+1}{2x+a}+\frac{a-2}{2x-a}=\frac{4a^2-5a}{4x^2-a^2}$

Ungleichungen

Klassen 7 - 11

Bestimme die Lösungsmenge (Grundmenge ist jeweils $\mathbb{Q}$).

1. $4x - 1 < x + 8$

2. $2x + 9 > 7 - 4x$

3. $a - 2x < b - 3x$

4. $3x - \frac{2}{3} > \frac{5}{2}x - 4$

5. $\frac{2-x}{3} < \frac{4x-3}{2}$

6. $\frac{x+3}{2} > \frac{x+2}{-3}$

7. $5 - x > 2x + 11 \wedge 3x - 7 < 4x - 2$

8. $5x - 1 > 3(x + 1) \wedge 3x + 2 < 7 - 2x$

9. $\frac{1}{x} > 1$

10. $\frac{1}{x} < 1$

11. $\frac{1}{x+1} < 2$

12. $\frac{5}{4-x} > \frac{1}{2}$

13. $\frac{5}{4-x} < \frac{1}{2}$

14. $\frac{3}{2x+5} > 4$

15. $\frac{3}{2x+5} < 4$

Gleichungen mit Beträgen

Klassen 7 - 9

Bestimme die Lösungsmengen (Grundmenge ist jeweils $\mathbb{Q}$).

1. $3 \cdot |x| = x + 4$

2. $3 \cdot |x| = -x - 4$

3. $4 \cdot |x| = 2(x + 3)$

4. $2 \cdot (|x| - 1) = 1 - x$

5. $2 \cdot (|x| - 1) = x - 5$

6. $|x| - x = 0$

7. $|x| - x = 6$

8. $2(|x| + x) = 2(|x| + 2)$

9. $|x| \cdot (x + 1) = x(2 + |x|) + 3$

10. $|x - 2| = 2x - 1$

11. $|2 - x| = 2x - 1$

12. $|x - 2| = -2x + 1$

13. $|x + 2| = 0{,}5x + 3{,}5$

14. $|2 - x| = 0{,}5x + 3{,}5$

15. $|2x + 1| = x + 5$

16. $|2x - 1| = x - 2$

17. $|2x + 3| = 3x + 5$

18. $2x + 3 = |3x + 5|$

Ungleichungen mit Beträgen

Klassen 7 - 11

Bestimme die Lösungsmengen (Grundmenge ist jeweils $\mathbb{Q}$).

1. $2 \cdot |x| \leq 3 - x$

2. $2 \cdot |x| > 3 - x$

3. $|x - 3| < x - 1$

4. $|x - 3| > x - 1$

5. $|x + 3| \geq 5 + 3x$

6. $|x + 3| \leq 5 + 3x$

7. $|2x + 3| > 3(x + 4)$

8. $|2x + 3| < 3(x + 4)$

9. $|2x - 3| \leq 3 - 2x$

10. $|2x - 3| \geq 3 - 2x$

11. $5 \cdot |2x + 5| < 29 + 8x$

12. $5 \cdot |2x + 5| \geq 29 + 8x$

13. $|3x - 1| > 12 - x - |3x - 1|$

14. $|3x + 1| < 5x + 11 - 2 \cdot |3x + 1|$

15. $|3x + 2| - 5(x + 2) \leq 2(x - |3x + 2|)$

16. $|2x + 4| - 2(x + 5) < x + 5 - 2 \cdot |2x + 4|$

Potenzen und Wurzeln - Übungsaufgaben

Klasse 10

1. Vereinfache die folgenden Terme

a) $\left(-2a^3\right)^4$ b) $\left(-3x^2\right)^5$ c) $(3x)^4\cdot(3x)^3$ d) $(2a)^3\cdot(2a)^{-4}$

e) $\left[\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{8}}\right]^{-16}$ f) $\left(p^2\right)^{-0,27}:p^{0,46}$ g) $\left(x^{\frac{r}{s}}\right)^{-\frac{2r}{s}}$ h) $\dfrac{\left(-g^3\right)^4\cdot 2h^3}{8g^3\cdot\left((-h)^3\right)^4}$

i) $\left(\left(\sqrt{5}\cdot a^{-2}b^3\right)^2\right)^6$ j) $\left(\left(\sqrt{3}\cdot x^2z^{-3}\right)^3\right)^4$

k) $\left(\dfrac{3xy}{4ab}\right)^4\cdot\left(\dfrac{8a^2b}{9x^3y^2}\right)^4$ l) $\left(\dfrac{6x^2y^4}{5a^2b}\right)^5\cdot\left(\dfrac{10ab}{3xy}\right)^5$

m) $\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^0+9\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3-10\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{1}{-3}\right)^{-3}$ n) $(-8)^4:4^{-8}$ o) $\left(-2^3\right)^{-5}\cdot\left(-2^{12}\right)$

2 Berechne die folgenden Terme

a) $\left(3a^2b^3-5a^2b^5+6a^3b^{-3}\right)\cdot 2a^4b^3$ b) $\left(5x^2y^3-4x^2y^{-5}+3x^3y^{-3}\right)\cdot 2x^3y^5$

c) $\left(2x^p+y^q\right)\cdot\left(2x^p-y^q\right)$ d) $\left(a^n+3b^m\right)\cdot\left(a^n-3b^m\right)$

e) $\dfrac{\left(a^2-b^2\right)^2}{(a+b)^3}$ f) $\dfrac{1-x^5}{x^7}+\dfrac{1}{x^2}$

g) $\dfrac{(3a+2b)^{2n-1}}{(3a+2b)^{2n+2}}$ h) $\dfrac{(2x+3y)^{3m-2}}{(2x+3y)^{3m-3}}$ i) $\dfrac{-2^{-3}}{(-2)^{-3}}-\dfrac{(-2)^{-2}}{2^{-2}}$

j) $6\cdot\left(-\dfrac{1}{2^{-3}}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{(-b)^9}\right)^{-2}+2\cdot\left(-b^6\right)^3:b^8$ k) $\left(a^4+a^2\right)\left(a^2+1\right)^{m-2}+\left(a^2+1\right)^{m-1}$

3 Berechne die folgenden Terme

a) $\left(\dfrac{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ b) $\left(\dfrac{a^2}{x}\right)^{-\frac{m}{n}}\cdot\left(\dfrac{a}{x^2}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2x^2}\right)^{-\frac{m}{n}}$

c) $\left(\dfrac{5a^{-m}b^nc^{-2}}{8d^3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{a^{-m-1}b^{n-1}c^{-3}}{8^2d^4}\right)^{-2}$ d) $\left[\left(xy^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{-1,5}y\right)\cdot\left(x^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^3$

e) $\left[\left(a^2\right)^{\frac{n}{m}}:\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}}\right]:\left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{n}{m}}$ f) $x^{\frac{p+1}{q}}:x^{\frac{p-1}{q}}\cdot x^{-\frac{2}{q}}$

Potenzen und Wurzeln - Übungsaufgaben

Klasse 10

4 Berechne die folgenden Terme nach der verallgemeinerten binomischen Formel

a) $\left(2x^2y^{-2} - 3x^3z^4\right)^4$ b) $\left(2a^3b^3 - 5a^{-2}c^3\right)^4$

5 Vereinfache die folgenden Terme

a) $\dfrac{\sqrt[3]{2x^2y^3}}{\sqrt[3]{3ab^6}} : \dfrac{\sqrt[3]{16x^{-4}y^{-3}}}{\sqrt[3]{81ab^3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{64a^2b^3}}{\sqrt[4]{xy^4}} : \dfrac{\sqrt[4]{4a^{-6}b^{-5}}}{\sqrt[4]{81x^5y^8}}$ c) $\left(\sqrt{8x} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2$

d) $\left(\sqrt{2a} - \dfrac{1}{\sqrt{8a}}\right)^2$ e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ f) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2^5}$

g) $\sqrt[4]{5^3} : \sqrt[6]{5^5}$ h) $\sqrt[3]{9} : \sqrt[5]{27}$ i) $\dfrac{6}{\sqrt{12}} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{2}}$

j) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{4}}$ k) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$ l) $\sqrt[3]{x^2y\sqrt{xy^{-1}}}$

m) $\sqrt[5]{a^2b\sqrt{a^6b^{-2}}}$ n) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[4]{216}}}$ o) $\dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}$

p) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{17} \cdot \sqrt[3]{17}}{\sqrt[6]{17}}}\right)^6$ q) $\left(\sqrt{z^5\sqrt{z^5}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ r) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt[3]{18}}\right)^{-3}}$

s) $\sqrt{\dfrac{13}{\sqrt{13}}}$ t) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{125}}}$ u) $(r+s)\sqrt[3]{\dfrac{r-s}{r^2+2rs+s^2}}$

6 Bestimme die Lösung (Definitionsmenge beachten) $G = \mathbb{R}$

a) $\sqrt[3]{4 - x^2} = 2$ b) $\sqrt[4]{20 - x^2} = 2$

c) $\sqrt[3]{7x - 6} + 3 = 7$ d) $4\sqrt[3]{5x - 8} = 3\sqrt[3]{9x + 1}$

e) $\left(x^{-\frac{5}{2}} - 7\right)^{-\frac{1}{2}} = 0{,}2$ f) $z^{\frac{3}{2}} - 25 = \dfrac{1}{11}\left(8z^{\frac{3}{2}} + 100\right)$

g) $24a^{0,75} = a^{1,5} - 81$ h) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{2x+2}} = \sqrt{2x+2} + 1$

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

Was versteht der Mathematiker unter Wachstum oder Abnahme (Zerfall oder negatives Wachstum) mit exponenziellem Charakter ?
Wachstum oder Abnahme wird als exponenziell betrachtet, wenn sich der Vorgang durch eine Exponenzialfunktion beschreiben lässt.
Charakteristisch daran ist, daß sich eine Größe pro Zeiteinheit um einen festen Prozentsatz ändert (z.B. pro Stunde um 5% zunimmt). Oder etwas allgemeiner formuliert:
Die in Betracht kommende Größe ändert sich in gleich langen Zeitintervallen um den gleichen Faktor. Der relative Zuwachs, auch Wachstumsrate genannt, ist immer konstant.
Genau genommen geht es nicht immer nur um zeitliche Abläufe sondern ganz allgemein um das Verhalten einer Größe in Abhängigkeit von einer anderen (wie z.B. die Lichtdurchlässigkeit als Funktion der Dicke einer Glasscheibe).

Beispiele für dieses Wachstumsverhalten finden sich in Physik, Chemie, Biologie, aber auch in der Medizin oder im Finanzwesen:

+ Radioaktiver Zerfall von Atomen
+ Wachstum einer Bakterienkultur oder einer natürlichen Population während eines begrenzten Zeitraums
+ Aufladen eines Kondensators im Gleichstromkreis
+ Luftdruckveränderung mit der Höhe
+ Verzinsung eines Kapitals

Neben kontinuierlichen Wachstumsvorgängen bezeichne ich das Wachstum, das nur in bestimmten Schritten erfolgt, als schrittweises exponenzielles Wachstum.
Ein Beispiel hierfür wäre die Berechnung von Zinseszinsen. Im Allgemeinen werden Zinsen nicht sofort und ständig, sondern nur zu bestimmten Terminen (z.B. Monatsende) gut geschrieben. Dazwischen weist das Konto keine Veränderung auf.

Auf unserer Erde wird jedes natürliche Wachstum durch äußere Einflüsse begrenzt. Irgendwann stößt das Wachstum an Grenzen, die den Prozeß verlangsamen und die Grenzen des Wachstums bestimmen.
Damit gelten alle Wachstumsmodellrechnungen nur für einen bestimmten Zeitraum.
Das Wachstum der Weltbevölkerung war zwischen dem Jahre 1700 und 1960 konstant.
Es verdoppelte sich etwa alle 35 Jahre. Würde dieses Wachstum aber bis zum Jahre 2500 ebenso fortdauern, wäre eine Bevölkerungszahl von ca. 150 000 Milliarden Menschen zu erwarten. Das ist vollkommen unmöglich.
Dennoch sind die mathematischen Modelle eine fundierte Grundlage um Vorhersagen oder auch die Grenzen des Gültigkeitsbereiches zu ermitteln.

Die Exponenzialfunktion läßt sich mit beliebiger Basis oder mit der Basis e darstellen.
In den Lösungen zur nachfolgenden Aufgabensammlung wird die Basis e nicht verwendet (bis auf eine Ausnahme). In einer Parallel-Datei möchte ich, wenn es die Zeit erlaubt, alternativ auch die Basis e einsetzen.

Die nachfolgend angegebenen Formeln bzw. Formelzeichen sind in den vielen Mathebüchern durchaus unterschiedlich dargestellt. Ich habe mich nun für die folgenden Formelbuchstaben entschieden:

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

Wachstumsgesetz:

$$y = b \cdot a^x$$

a = Wachstumsfaktor
b = Startwert bzw. Ausgangswert zum Zeitpunkt x = 0
x = Zeitwert
y = Endwert

Ein Wachstum mit **konstantem Wachstumsfaktor** in **gleichen Zeitspannen** nennt man **exponenzielles Wachstum.**

Ist der Wachstumsfaktor **a > 1** so handelt es sich um eine **Zunahme** (Wachstum)

Ist der Wachstumsfaktor **0 < a < 1** so handelt es sich um eine **Abnahme** (Zerfall)

Zinseszinsrechnung:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

K_0 = Startkapital vor der Verzinsung
K_n = Kapital nach n Jahren
q = Zinsfaktor
n = Anzahl der Zinsjahre
p = Zinssatz in %

Die Formeln gelten wenn ein festes Kapital auf einem Anlagekonto mehrere Jahre verzinst wird ohne daß man am Ende jeden Jahres die Zinsen abhebt. Die jeweils angefallenen Zinsen werden auch mit verzinst.

Zerfallsgesetz für die Halbwertszeit radioaktiver Elemente:

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T}}$$

N(t) = restliche (nicht zerfallene) Masse zum Zeitpunkt t
N_0 = Masse zu Beginn des Zerfalls
t = Zerfallszeitraum
T = Halbwertszeit des Isotops

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

Aufgaben

1. Ein Waldbestand von ca. 40 000 fm (Festmeter) wächst mit einer jährlichen Zuwachsrate von 3% (also exponenziell).

a) Um wieviel fm wird der Bestand in 4,5 Jahren gewachsen sein, wenn inzwischen kein Holz geschlagen wird und die Bedingungen sich nicht wesentlich ändern ?

b) Um wieviel fm Holz ist der Wald in den vergangenen 3 Jahren gewachsen (vorausgesetzt die Wachstumsbedingungen waren annähernd konstant gewesen) ?

2. Im Jahre 1993 lebten in Mexiko etwa 92 Mio. Menschen. Die Bevölkerung dort nahm jährlich um ca. 1,75% zu.
Wie viele Menschen werden im Jahre 2013 in Mexiko leben, wenn man annimmt, daß das Wachstum konstant bleibt ?

3. Der Kaninchenbestand in einem Streichelzoo wuchs in 12 Jahren exponenziell von 30 auf 125 Kaninchen an.

a) Wie groß war der jährliche Wachstumsfaktor ?

b) Berechne den Prozentsatz der jährlichen Zunahme.

4. Die Einwohnerzahl Afrikas im Jahre 1991 betrug etwa 712 Mio. Im Jahre 2001 rechnete man dort mit einer Bevölkerung von 948 Mio.
Um wie viel Prozent hat die Bevölkerung jährlich zugenommen ?

5. Die Weltbevölkerung wurde im Jahre 1996 auf 5,9 Milliarden Menschen geschätzt bei einem jährlichen Wachstum von ca. 1,5%.
In welchem Jahr würde die Menschheit bei gleichem Wachstum die 10-Milliarden-Grenze erreichen ?

6. In Äthiopien lebten 1995 etwa 60.100.000 Menschen bei einer Wachstumsrate von 3,2%.

a) Berechne für diese Wachstumsrate die Bevölkerungszahl im Jahre 2010.

b) In welchem Jahr hätte sich bei gleich bleibendem Wachstum die Bevölkerungszahl verdoppelt ?

7. In einer Bakterienkultur werden 2 Stunden nach dem Ansetzen rund 600, nach weiteren 4 Stunden rund 25.000 Bakterien gezählt.

a) Wie viele Bakterien waren (bei exponenziellem Wachstum) 3 Stunden nach dem Ansetzen der Kultur entstanden ?

b) Wie groß ist die stündliche Zuwachsrate der Bakterienkultur in Prozent ?
Stelle das Wachstum für die ersten 60 Minuten nach dem Ansetzen grafisch dar.

8. Wir nehmen an, daß sich die Seerosen in einem Teich wöchentlich verdoppeln.

a) Wie viel Prozent wachsen die Seerosen täglich ?

b) Nach wie viel Tagen hat sich die Seerosenpopulation versechsfacht ?

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

9. Die Anzahl der Bakterien auf einer Nährlösung wächst annähernd exponenziell. Um 10 Uhr werden 1600 Bakterien gezählt. Es ist bekannt, daß die Kultur stündlich um 5,2% wächst.

a) Wie viel Bakterien waren um 6 Uhr in der Kultur ?

b) Berechne die Anzahl Bakterien die um 12 Uhr des nächsten Tages auf der Nährlösung gezählt werden können.

c) Wie groß ist die Generationszeit der Bakterien ?

10. Ein PKW kostet als Neufahrzeug 24.200 EUR. Der jährliche Wertverlust des Autos kommt auf 20% des jeweiligen Zeitwertes. Handelt es sich um einen linearen oder exponenziellen Vorgang ? Bestimme die Zuordnungsvorschrift.

11. Unter Inflation versteht man einen Kaufkraftverlust oder auch Geldentwertung. Nach welcher Formel kann man die Kaufkraft von 1 EUR in x Jahren berechnen, wenn die konstante jährliche Inflationsrate p % ist ?

12. Der auf die Erdoberfläche wirkende statische Druck der Atmosphäre wird als Luftdruck bezeichnet. Der Luftdruck der Erdatmosphäre nimmt mit der Höhe angenähert exponenziell ab. Die Abnahmerate beträgt ca. 13 % pro 1000 m.

a) Wie lautet die Vorschrift, die der Höhe H (in m) den Luftdruck p zuordnet ? Ausgangswert ist ein Luftdruck von 1000 hPa (Hektopascal) am Boden.

b) Welcher Luftdruck herrscht in 3500 m Höhe ?

13. Je tiefer ein Taucher in einen See hinabtaucht, um so stärker verringert sich die Beleuchtungsstärke des Sonnenlichtes. Mit jedem Meter Wassertiefe nimmt die Beleuchtungsstärke um etwa 39% ab,

a) Gib die Formel für die Beleuchtungsstärke in Abhängigkeit von der Wassertiefe an. Die Beleuchtungsstärke an der Wasseroberfläche soll mit 1 angenommen werden.

b) Um wie viel Prozent hat sich die Beleuchtungsstärke in 10 m Wassertiefe gegenüber dem Wert an der Wasseroberfläche verringert ?

14. Ein Kapital von 6.000 EUR wird bei einer Bank zu einem festen Zinssatz von 3.5 % für acht Jahre angelegt. Die Zinsen verbleiben auf dem Konto und werden jeweils am Jahresende dem Kapital zugeschlagen und mitverzinst.

a) Auf wieviel EUR ist das Kapital nach Ablauf der acht Jahre angewachsen ?

b) Nach wie viel Jahren hat sich das Kapital verdoppelt, unter der Voraussetzung, daß sich der Zinssatz nicht ändert ?

15. Ein Kapital von 110.000,- € wächst in 4 Jahren mit allen Zinsen auf 133.705,69 €. Dabei wurden die Zinsen jährlich gutgeschrieben.

Wie hoch ist der Zinssatz ?

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

16. Ein Kapital auf einer amerikanischen Bank wurde mit 4,5% jährlich verzinst und ist in 40 Jahren mit Zins und Zinseszins auf 1.163.273 Dollar angewachsen.

Wie hoch war das Anfangskapital ?

17. Frau Meier hat vor fünf Jahren für 115.000 EUR ein Haus gekauft. Sie kann es heute für 137.000 EUR wieder verkaufen.

Wie hoch war die durchschnittliche Verzinsung pro Jahr ?

18. Ein beliebiges Kapital soll sich in 35 Jahren verfünffacht haben.

Welcher Zinssatz muß vereinbart werden, wenn dieser die fünf Jahre konstant sein soll und die Zinsen stets dem Kapital zugeschlagen werden ?

19. Der Preisanstieg betrug 1985 in der Bundesrepublik 2,9 %.

Wieviel kostet demnach 1 Liter Milch (Preis im Jahr 2007: 0,79 EUR) in 5 und in 10 Jahren, wenn man diesen Preisanstieg auch für die kommenden Jahre zugrunde legt ?

20. Die Glastür eines Mikrowellenherdes soll die Strahlung (elektromagnetische Wellen) aus dem Inneren dämpfen. Je nach Glasdicke ergeben sich unterschiedliche Dämpfungswerte S in % (siehe folgende Tabelle).

a) Stelle den Zusammenhang zwischen Glasdicke d und Dämpfungsfaktor S in einer Formel dar.

b) Maximal 1% der Strahlung darf durch die Tür austreten (lt. Gesetzgeber). Welche Glasdicke ist mindestens einzubauen ?

c) Wie hoch ist die Strahlungsemission wenn das Glas 6 mm dick wäre ?

d in mm	1	2	3
S in %	30	9	2,7

21. Durch mehrere Zerfallsprozesse entsteht aus dem natürlich vorkommenden Isotop Uran ^{234}U das radioaktive Wismut ^{210}Bi. Von Wismut ^{210}Bi zerfallen wiederum jeden Tag etwa 13% und wandeln sich in zwei weitere Isotope um.
Bestimme die Menge an Wismut Wismut ^{210}Bi die von ursprünglich 20 g nach 12 Tagen noch übrig sind.

22. Radioaktive Stoffe wie z. B. Radium ^{226}Ra oder Caesium ^{137}Cs senden Strahlen aus und zerfallen dabei. Von den jeweiligen Isotopen sind nach der Zeit t nur noch die Hälfte vorhanden; diese Zeit t heißt "Radioaktive Halbwertszeit".

a) Bei der Umwandlung des Radiumisotops ^{226}Ra beträgt die Halbwertszeit 1602 Jahre. Nach wie viel Jahren hat man von ursprünglich 20 Gramm nur noch 19 Gramm des Isotops zur Verfügung?

b) Nach wie viel Jahren ist die radioaktive Substanz auf 1% ihrer Ausgangsmenge (20 g) zerfallen ?

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

23. Von einem Isotop zerfallen in 12 Jahren 9,5%.
Berechne die Halbwertszeit dieses Stoffes.

24. Das radioaktive Nuklid Radon ^{222}Rn zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,8 Tagen.
Berechne, wie viel Prozent der Ausgangsmenge von 5 Gramm nach 25 Tagen noch vorhanden sind.

25. Bei einer Schilddrüsenuntersuchung wird einem Patienten radioaktives Jod mit einer Halbwertszeit von 8 Tagen verabreicht.
Wieviel Prozent des verabreichten Jodisotops kann der Patient nach 3 Wochen höchstens noch in seinem Körper haben ?

26. Uran ^{231}U ist radioaktiv. Von 10.000 Kernen zerfallen pro Tag ca. 1591 Kerne.
Wie viel Uran ^{231}U ist nach 8 Tagen noch vorhanden, wenn die Ursprungsmenge bei 100 Gramm lag ? Wie lang ist die Halbwertszeit ?

27. Mit der ^{14}C - oder Radiokarbonmethode ist es möglich, das absolute Alter von organischen Stoffen z.B. Pflanzenresten zu bestimmen.
Jedes Lebewesen nimmt laufend den natürlich in der Atmosphäre vorkommenden, radioaktiven Kohlenstoff ^{14}C auf, und gibt einen Teil davon als Stoffwechselprodukt auch wieder ab. Auf diese Weise besteht im lebenden Organismus ein Gleichgewicht mit dem nicht radioaktiven Kohlenstoff ^{12}C. Dieses Verhältnis beginnt sich erst ab Eintreten des Todes zu verschieben, da nun kein ^{14}C mehr aufgenommen werden kann. Mit Hilfte der Halbwertszeit des radioaktiven Kohlenstoffes kann so der Zeitpunkt des Todes berechnet werden.
Jedes Gramm Kohlenstoff, das aus einer Probe einer lebenden Pflanze gewonnen wurde, enthält $N_0 = 6,0 \cdot 10^{10}$ ^{14}C - Atome. Nach dem Tod der Pflanze wird kein ^{14}C mehr aufgenommen und die Zahl der ^{14}C - Atome nimmt ab. Nach 10.000 Jahren sind noch $1,8 \cdot 10^{10}$ ^{14}C - Kerne vorhanden.

a) Stelle den Zerfallsprozeß in einem Diagramm dar.
Die Ordinate (Hochachse) ist hierbei mit einer logarithmischen Skala zu versehen.
Abszisse: Zeitachse mit 1 cm $\hat{=}$ 1000 Jahren
Ordinate: Anzahl ^{14}C - Atome mit $1 \cdot 10^{10} \le N \le 10 \cdot 10^{10}$

b) Berechne die Halbwertszeit T

c) Aus alten Hirsekörnern die man in einem Pharaonengrab fand, wurde 1 Gramm reiner Kohlenstoff extrahiert. Das Material enthielt $3,78 \cdot 10^{10}$ ^{14}C - Atome.
Wann ungefähr könnte der Pharao im Grab beigesetzt worden sein ?

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

I. Allgemeines

Eine Gleichung höheren Grades wie z. B.

$$x^4 = 3$$

kann nach x aufgelöst werden, indem man die Wurzel zieht.

$$x^4 = 3 \iff x = \sqrt[4]{3}$$

Tritt die Unbekannte x jedoch im Exponenten einer Potenz auf, spricht man von einer Exponenzialgleichung, wie z. B. bei

$$3^x = 5\,.$$

Jede Exponenzialgleichung $a^x = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$ besitzt genau eine Lösung.

Für die Lösung dieser Exponenzialgleichungen, d. h. für den Wert x hat man den Namen: Logarithmus von b zur Basis a eingeführt (Die Buchstaben a bzw. b sind beliebig wählbar).

Logarithmusdefinition:

$$\boxed{a^x = b \iff x = \log_a b} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}^+;\ a \neq 1$$

x ist der Logarithmus von b zur Basis a.

Der Logarithmus $\log_a b$ ist also nichts anderes als der Exponent in einer Exponenzialgleichung, statt $a^x = b$ könnte man auch $a^{\log_a b} = b$ schreiben.

($\log_a b$ ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten)

b ist die Zahl die zu logarithmieren ist, sie wird Numerus genannt.
a ist die Basis (der Potenz a^x).

Eine Anmerkung zur Schreibweise:
Eigentlich müsste man $\log_a(b)$ schreiben. Man kann die Klammer weglassen, wenn keine Missverständnisse aufkommen.
z. B. $\log_a b \cdot c$ ist missverständlich, also muss hier $\log_a(b \cdot c)$ geschrieben werden

Hinweise für das Rechnen mit Logarithmen:

- Ist die Basis a größer als 1, dann gilt:
  - für einen Numerus b größer als 1 ist der Logarithmus positiv; z. B. $\log_2 8 = 3$ $\left(2^3 = 8\right)$
  - für einen Numerus zwischen 0 und 1 ist der Logarithmus negativ; z. B. $\log_2 0{,}125 = -3$ $\left(2^{-3} = 0{,}125\right)$
- Ist die Basis a kleiner als 1, dann gilt:
  - für einen Numerus b größer als 1 ist der Logarithmus negativ; z. B. $\log_{0,5} 4 = -2$ $\left(0{,}5^{-2} = 4\right)$
  - für einen Numerus b zw. 0 und 1 ist der Logarithmus positiv; z. B. $\log_{0,5} 0{,}25 = 2$ $\left(0{,}5^2 = 0{,}25\right)$

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

Formelsammlung

Rechengesetze für das Logarithmieren

Die Rechengesetze haben für jedes Logarithmensystem Geltung; d. h. sie können immer da angewendet werden, wo Logarithmen auf die gleiche Basis bezogen werden.

Multiplizieren

$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$ $\quad b, c \in \mathbb{R}^+$

$\log_a(b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n)=\log_a b_1+\log_a b_2+\ldots+\log_a b_n$

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.

Dividieren

$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.

Potenzieren

$\log_a(b^c)=c\cdot\log_a b$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Logarithmus der Basis und dem Exponenten.

Radizieren

$\log_a\sqrt[n]{b^m}=\frac{m}{n}\cdot\log_a b$

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Produkt aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

Radizieren ist kein eigenes Logarithmengesetz. Es handelt sich um Potenzieren mit rationalem Exponenten. (Rationale Zahlen sind die Menge aller Brüche der Form m/n)

Sonderfälle und besondere Logarithmen

$\log_a a=1$	$\log_a 1=0$	$\log_a(a^n)=n$	$a^{\log_a b}=b$
$\lg 10=1$	$\lg 1=0$	$\lg(10^n)=n$	$10^{\lg b}=b$
$\ln e=1$	$\ln 1=0$	$\ln(e^n)=n$	$\log_{a^n} a=\frac{1}{n}$
$\operatorname{lb} 2=1$	$\operatorname{lb} 1=0$	$\operatorname{lb}(2^n)=n$	$\log_a\left(\frac{1}{a}\right)=-1$

$\log_a b=\log_c b\cdot\log_a c$ $\quad$ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $\quad$ $\log_a\frac{b}{c}=-\log_a\frac{c}{b}$ $\quad$ $\log_{\frac{1}{a}} b=\log_a\frac{1}{b}$

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

Vorzeichen und Logarithmensymbole

log: - in deutschen Büchern Logarithmen zu einer beliebigen Basis
- auf amerik. Taschenrechnern und Literatur Logarithmus zur Basis 10

lg: Logarithmus zur Basis 10 (dekadischer, Briggscher oder Zehnerlogarithmus)

ln: Logarithmus zur Basis e = 2,71828… (natürlicher Logarithmus)

lb: Logarithmus zur Basis 2 (binärer oder dualer Logarithmus)

Umrechnung von einem System in ein anderes
Berechnung beliebiger Logarithmen (mit Taschenrechner)

$$\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a} = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

mit x als beliebige Basis;
insbesondere x = 10 oder x = e

$$\log_{13} 353 = \frac{\lg 353}{\lg 13} = \frac{\ln 353}{\ln 13} = 2{,}287...$$

Natürliche Logarithmen

Basis $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ $e = 2{,}718281828...$ (Eulersche Zahl)

$\log_e \mathrel{\hat{=}} \ln$ $\ln a = x \Leftrightarrow a = e^x$

$$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10} = \ln a \cdot \lg e$$

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10}$$

Beim Rechnen mit Logarithmen sei auf folgende Fehler hingewiesen:

$\log_a(b+c) \neq \log_a b + \log_a c$ $(\log_a(b+c)$ ist nicht weiter auflösbar$)$

$\log_a(b-c) \neq \log_a b - \log_a c$

$\log_a b + c \neq \log_a(b+c)$

$\log_a(b^n) \neq (\log_a b)^n$

$\log_a b \cdot \log_a c \neq \log_a(b \cdot c)$

Gymnasium / Realschule

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

Musterlösungen

Achtung: Bei allen Logarithmenrechnungen muß die Probe gemacht werden um Scheinlösungen zu erkennen. Die nachfolgenden Rechnungen wurden dahingehend überprüft, die Probe selbst wurde jedoch nicht mit dazugeschrieben.

1. Lösungsverfahren: Logarithmusdefinition verwenden

Voraussetzungen: Gleichung mit nur einem Logarithmus.

Formel: $\boxed{\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b}$

Beispiele:

Grundform:

$$\log_3 x = 4$$
$$x = 3^4$$
$$\underline{x = 81}$$
$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{81\}}}$$

Quadratischer Numerus:

$$\log_5 x^2 = 3$$
$$x^2 = 5^3 \quad \Big|\sqrt{}$$
$$|x| = \sqrt{5^3}$$
$$\underline{x = \pm 11{,}18...} \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\pm 11{,}18...\}}}$$

Numerus als Bruch:

$$\log_3\left(\frac{9x}{4x-3}\right) = 2$$
$$3^2 = \frac{9x}{4x-3}$$
$$9(4x-3) = 9x$$
$$36x - 27 = 9x$$
$$27x = 27$$
$$\underline{x = 1}$$
$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{1\}}}$$

Faktor vor dem Logarithmus:

$$2 \cdot \log_{27} x = \frac{2}{3} \quad \Big| :2$$
$$\log_{27} x = \frac{\cancel{2}}{3 \cdot \cancel{2}}$$
$$\log_{27} x = \frac{1}{3}$$
$$x = 27^{\frac{1}{3}}$$
$$x = \sqrt[3]{27}$$
$$\underline{x = 3} \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{3\}}}$$

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

2. Lösungsverfahren: Vergleich der Numeri

Voraussetzungen: Logarithmusgleichung mit zwei Logarithmen

Formel: $\boxed{\log_a b = \log_a c \quad \Rightarrow \quad b = c}$

Wenn zwei Logarithmen gleiche Basis besitzen, sind auch ihre Numeri gleich. Die Formel ist auf Logarithmusgleichungen anwendbar die aus zwei Logarithmen bestehen, aber kein Absolutteil haben.

Beispiele:

Aufgabe ohne Scheinlösung:

$$\log_3(3x-5) = \log_3(2x+3)$$

$$3x-5 = 2x+3$$

$$\underline{x = 8}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{\,8\,\}}}$$

Aufgabe mit Scheinlösung:

$$\log_7(4x+5) = \log_7(3x)$$

$$4x+5 = 3x$$

$$\underline{x = -5}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{\;\}}}$$

Weil nach der Probe beide Numeri negativ sind, ist die Gleichung nicht definiert.
- 5 ist damit keine Lösung.

Faktor vor dem Logarithmus (mit Scheinlösung):

$$2 \cdot \log_4(3x+1) = \log_4(6x+10)$$

$$\log_4(3x+1)^2 = \log_4(6x+10)$$

$$(3x+1)^2 = 6x+10$$

$$9x^2+6x+1 = 6x+10$$

$$9x^2 = 9$$

$$x^2 = 1$$

$$|x| = 1$$

$$\underline{x = \pm 1}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{1\}}}$$

Die Probe zeigt, daß nur +1 eine Lösung ist, denn x = -1 führt zu einem negativen Numerus und damit zu einem undefinierten Logarithmus.

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

3. Lösungsverfahren: Vergleich der Exponenten

Voraussetzungen: Logarithmus so umformbar daß gleiche Basen entstehen

Beispiele:

Einfache Aufgabe:

$$\log_7 49 = x$$
$$7^x = 49$$
$$7^x = 7^2 \quad \leftarrow \text{gleiche Basis, dann Exponentenvergleich möglich}$$
$$\underline{x = 2}$$
$$\underline{\underline{\log_7 49 = 2}}$$

Schwierigere Aufgabe:

$$\log_{\sqrt{5}} 25 = x$$
$$\left(\sqrt{5}\right)^x = 25$$
$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^x = 5^2$$
$$5^{\frac{x}{2}} = 5^2 \quad \leftarrow \text{gleiche Basis, dann Exponentenvergleich möglich}$$
$$\frac{x}{2} = 2$$
$$\underline{x = 4}$$
$$\underline{\underline{\log_{\sqrt{5}} 25 = 4}}$$

4. Lösungsverfahren: Logarithmengesetze anwenden

Voraussetzungen: mehr als zwei Logarithmen oder ein zusätzlicher Absolutteil

Formeln:

$$\boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

$$\boxed{\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$$

$$\boxed{\log_a \left(b^x\right) = x \cdot \log_a b}$$

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

Beispiele:

Aufgabe mit Scheinlösung:

$$\log_2(-x+12)+\log_2(-2x)-7=0$$
$$\log_2[(-x+12)\cdot(-2x)]-7=0$$
$$\log_2(2x^2-24x)=7$$
$$2x^2-24x=2^7$$
$$2x^2-24x-128=0$$
$$x^2-12x-64=0$$
$$x_{1/2}=\frac{12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 1\cdot(-64)}}{2\cdot 1}$$
$$x_{1/2}=\frac{12\pm 20}{2}$$
$$\underline{x_1=16}, \quad \underline{x_2=-4}$$
$$\underline{\underline{\mathbb{L}=\{-4\}}}$$

Die Probe ergibt, daß nur - 4 eine Lösung ist, denn x = 16 führt zu einem negativen Numerus und damit zu einem undefinierten Logarithmus.

Aufgabe ohne Scheinlösung:

$$\log_2 8(5x+3)-\log_2(7x+1)=3$$
$$\log_2\frac{8(5x+3)}{7x+1}=3$$
$$\frac{8(5x+3)}{7x+1}=2^3$$
$$8(5x+3)=8(7x+1)$$
$$5x+3=7x+1$$
$$-2x=-2$$
$$\underline{x=1}$$
$$\underline{\underline{\mathbb{L}=\{1\}}}$$

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

5. Lösungsverfahren: Logarithmenbasis wechseln

Voraussetzungen: Logarithmen mit verschiedenen Basen

Formeln:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a} = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}}$$

Beispiele:

Aufgabe:

$\log_{3,5} 8 = x$ Umformen in eine Potenzgleichung

$3,5^x = 8$ logarithmieren

$\lg 3,5^x = \lg 8$ 3. Logarithmengesetz

$x \cdot \lg 3,5 = \lg 8$

$$x = \frac{\lg 8}{\lg 3,5}$$

$$\underline{\underline{\log_{3,5} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 3,5}}}$$

Wie kann eine Wurzel in eine Potenz umgewandelt werden? Ganz einfach!
Der Radikand (der Term unter der Wurzel) ist die Basis der Potenz.
Der Exponent der Potenz ist ein Bruch und setzt sich zusammen aus dem Wurzelexponenten (= Nenner) und dem Exponenten des Radikanden (= Zähler).
Wenn der Radikand keinen Exponenten aufweist, dann ist der Wert 1.

1. Beispiel: $\sqrt{5} = \sqrt[2]{5^1} = 5^{\frac{1}{2}}$

2. Beispiel: $\sqrt[3]{6^5} = 6^{\frac{5}{3}}$

3. Beispiel: $\sqrt[5]{\frac{a}{3z}} = \sqrt[5]{\left(\frac{a}{3z}\right)^1} = \left(\frac{a}{3z}\right)^{\frac{1}{5}}$

4. Beispiel: $\sqrt[3]{\frac{7xy^3z}{28b^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{7xy^3z}{28b^2}\right)^1} = \left(\frac{7xy^3z}{28b^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{7^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^1 \cdot z^{\frac{1}{3}}}{28^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}}$

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

II. Aufgaben

1. Bestimme die Lösung der Exponenzialgleichung ohne Taschenrechner

a) $2^x = 32$ b) $5^x = 0{,}04$

c) $0{,}5^x = 32$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1{,}5$

2. Berechne die Logarithmen ohne Taschenrechner

a) $\log_2 8$ b) $\log_5 125$ c) $\log_4 1$

d) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)$ e) $\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$ f) $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$

g) $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}25$ h) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ i) $\log_{100} 1000$

3. Berechne die Logarithmen ohne Taschenrechner

a) $\log_a a^9$ b) $\log_a \left(a^3\right)^5$ c) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

d) $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt{a}$ e) $\log_{0,1} \sqrt[4]{10}$ f) $\log_8\left(\frac{1}{\sqrt[5]{512}}\right)$

g) $\log_{\sqrt{5}} 5$ h) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[7]{64}$ i) $\log_{\frac{1}{\sqrt{8}}} \sqrt[9]{0{,}125}$

4. Berechne die Logarithmen ohne Taschenrechner

a) $\log_a a$ b) $\log_a 1$ c) $\log_a a^n$

d) $\log_a\left(\frac{1}{a}\right)$ e) $\log_a \sqrt[3]{a^5}$ f) $\log_{\frac{1}{a}} a^2$

g) $\log_{a^5}\left(\frac{1}{a^7}\right)$ h) $\log_{\frac{1}{a^2}} \sqrt[3]{a^5}$ i) $\log_{|a|} a^3$

5. Zerlege soweit wie möglich in Summanden

a) $\log_a\left(5b^2c^3\right)$ b) $\log_a\left(\frac{2c^8}{4bx^2}\right)$ c) $\log_a\left(\frac{2\left(p^2+q^2\right)x}{x+y}\right)$

d) $\log_a\left(\frac{x^3\, b\, \sqrt[4]{c}}{d^3e^5}\right)$ e) $\log_a\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ f) $\log_a\left(\frac{\sqrt[3]{u}}{v^4-w^4}\right)$

g) $\log_a\sqrt{\frac{3x^2\sqrt{y}}{2y^2\sqrt{x}}}$ h) $\log_a\left(\frac{m^2\sqrt[3]{m^2\sqrt{n^3}}}{m\sqrt[6]{n}}\right)$ i) $\log_a x^{\log_a x}$

k) $\log_a \sqrt[5]{5xy\sqrt{x+y}}$ l) $\log_a \sqrt[5]{\frac{b^3c}{\sqrt{b^2-c^2}}}$ m) $\log_a \sqrt[4]{b\sqrt[3]{c\sqrt{d}}}$

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

6. Fasse zusammen

a) $\log_5 125 - \log_{\frac{1}{6}} 216 + \log_{0,2} 0{,}04 + 4 \cdot \log_5 0{,}2$

b) $3 \log_4 0{,}25 + 2 \log_5 0{,}008 - 6 \log_{0,01} 1000$

c) $\log_3 \sqrt[5]{27} + \log_{2,25}\left(\frac{8}{27}\right) + \log_{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{125}{27}} - \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{81}{16}\right)$

7. Fasse zusammen und vereinfache weitgehendst

a) $\log_a 5 + \log_a 9$

b) $\log_a 2{,}5 - \log_a 0{,}5$

c) $4 \log_a 2 + 2 \log_a 16$

d) $\log_a\left(b^2 - c^2\right) - \log_a (b + c)$

e) $\log_a\left(r\sqrt{r}\right) - \log_a \frac{1}{s^3} + 2 \log_a r - 3 \log_a s$

f) $\frac{1}{2} \cdot \log_9 7 + \frac{1}{2} \cdot \log_9 7^{-1} + \frac{1}{4} \cdot \log_9 81$

g) $\lg 6 - \lg 3 - 2$

h) $2 \cdot \lg(x+1) + 3 \cdot \lg(x-1) - 3 \cdot \lg\left(x^2 - 1\right)$

i) $\log_5 (u \cdot v) - \log_5\left(u^2 \cdot v\right)$

k) $\lg\frac{1}{x} - \lg\frac{2}{x}$

l) $\lg 2 - 3 \lg 2 + 2 \lg x$

m) $5 \lg(x+3) - 3 \lg x$

n) $3 \lg(x-2) - 4(\lg x + \lg 2) - \log_2 16$

o) $5 \lg(x+2) - 0{,}2 \lg(x-2) - 4 \lg(x+2) - 0{,}8 \lg(x-2)$

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

8. Fasse zusammen

a) $2\lg a + 0{,}5\lg b + 3\lg c$

b) $\frac{1}{3}\left[\lg a + \frac{1}{3}\lg(a-b) - 2\left(\lg b + \frac{1}{3}\lg 3\right)\right]$

c) $\frac{1}{2}\lg 2(a-1) - \lg 3 - \lg(a+1)$

d) $\frac{1}{2}\log_a z^3 - \log_a\left(\frac{z^2}{\sqrt{y}}\right)$

e) $2\log_a\left(u^2\sqrt{u\cdot v}\right) - 4\log_a\left(\frac{u}{v^2}\right)$

f) $0{,}5\left[\log_a\left(p^2\cdot q\right) - 3\right] - \left(\frac{1}{2} - \log_a\frac{\sqrt{q}}{p}\right)$

g) $4 - \log_a\left(b\cdot a^4\right)$

h) $\log_a x + 1$

9. Berechne - ohne Taschenrechner - und fasse zusammen

a) $\log_{a^2} a^3 + \log_{a^2} a$

b) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[5]{a^2} + \log_{\sqrt{a}} \sqrt[7]{a^3}$

c) $\log_8 (-2)^4$

d) $\log_{\frac{1}{9}} (-81)^{-2}$

e) $\log_{\sqrt[4]{27}} \sqrt[5]{9}$

f) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \sqrt[4]{2}$

g) $\log_{\sqrt[5]{81}} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{3^4}}$

h) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2}}}\right)$

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

10. Löse nach x auf; mache ggf. die Probe!

a) $\log_4(3x+8)-\log_4(x-1)=2$

b) $\log_3(x+2)+\log_3(x+4)=\log_3[7(2x-1)]$

c) $2\log_a x=\log_a 6-3\log_a 2$

d) $\log_a x=\log_a 7+1$

e) $\log_a x^2-\log_a x+2=0$

f) $\log_2\sqrt[3]{x}-2\log_2 x=\frac{1}{2}-3\log_2\sqrt{x}$

g) $\lg\sqrt{x^2}=-16$

h) $2\lg\sqrt{x}=-12$

i) $2\lg\sqrt{|x|}=-12$

k) $\lg\left(\frac{1}{|x|}\right)=3$

l) $\log_x 2+\log_x(x+12)-2=0$

m) $\log_x(x-3{,}75)+1=0$

n) $\log_2(\log_5 x)=1$

o) $\log_5[\log_4(\log_3 x)]=0$

p) $\frac{1}{2}\log_4\sqrt{|5x-1|}+0{,}25=0$

11. Berechne mit dem Taschenrechner

a) $\log_4 12$ b) $\log_6\left(\frac{1}{3}\right)$ c) $\log_5\sqrt[3]{28}$ d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}\sqrt{3}$

12. Forme um in Logarithmen

a) **zur Basis 8**

aa) $\log_2 3$ ab) $\log_4\sqrt{5}$ ac) $\log_{16} x$

b) **zur Basis 10**

ba) $\log_2 10$ bb) $\log_{0{,}1} 7$ bc) $\log_3 2$

c) **zur Basis 2**

ca) $\log_8 4$ cb) $\log_3 27$ cc) $\lg 100$

Logarithmus - Übungsaufgaben

Klasse 10

13. Löse folgende Gleichungen ohne Taschenrechner

a) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$
b) $\log_{a^2} \sqrt[5]{a} = x$

c) $\log_{\sqrt[8]{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^2 = x$
d) $\log_{\sqrt[3]{16}} \frac{1}{\sqrt[5]{4}} = x$

e) $\log_x 64 = 3$
f) $\log_x 2 = 7$

g) $\log_x 256 = 8$
h) $\log_{\sqrt{3}} x = -5$

i) $\log_x \frac{1}{25} = 4$
k) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = 8$

l) $\log_5 (4x - 1) = -1$
m) $\log_2 (x^2 - 1) = 8$

n) $\log_{\sqrt[3]{2}} (x^2 - 2) = 6$
o) $\log_x (x + 2) = 2$

p) $\log_x 2(7{,}5 - x) = 2$
q) $\log_2 (x - 5) + \log_2 (x + 2) = 3$

r) $\lg(x + 4) + \lg x = \lg 21$
s) $\log_x (x + 12) + \log_x 2 = 2$

14. Löse folgende Gleichungen nach x auf (wenn möglich ohne Taschenrechner)

a) $\log_2 x - \log_8 27 = 0$

b) $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} 25 = 0$

c) $\log_{0,4} x = \log_{6,25} 3$

d) $\log_6 \sqrt{x} = \log_{\sqrt{6}} 2^3$

e) $\log_a (x + 4) - \log_{\sqrt{a}} \left(x + \frac{15}{4}\right) = 0$

f) $\log_a x^2 - 4 - \log_{\frac{2}{a}} 16 = 0 \quad \text{mit } a > 0,\ a \neq 1,\ a \neq 2$

g) $\log_9 (1 + \log_2 x) - \log_3 2 = 0$

h) $\lg x^3 + 2 \lg x^2 = 5$

i) $\lg(2x) + \lg(3x) + \lg(4x) = 3$

k) $3^{2 \lg x} = 12$

l) $x^{\log_5 (5x) - 4} = 625$

Exponenzialgleichungen - Teil 2

Klasse 10

Bestimme jeweils die Lösungsmenge: $G = \mathbb{R}$

1. $2^{x} - 2^{\frac{1}{x}} = 0$

2. $\left(5^{x}\right)^{x-3} = 1$

3. $48 = 5^{x+1} - 5^{x-1}$

4. $27^{\frac{5}{3}x-1} + 9^{2,5x-1} + 3^{5x-3} = 3645$

5. $4^{1-x} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x-4}$

6. $4 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 0,5^{-x}$

7. $\left(3^{2x}\right)^{x-2} = \dfrac{\left(3^{2x-5}\right)^{x}}{3^{3}}$

8. $5^{\frac{3x}{4}-3} = \sqrt[5]{5^{x+1}}$

9. $3^{15} \cdot 3^{(x-1)(5x-1)} = 3^{x-8} \cdot 3^{(x-2)(5x-7)}$

10. $7\left(7^{4x}\right)^{5x-2} = 7^{5-9x} \cdot \left(7^{5x}\right)^{4x}$

11. $3^{2x^2-7x-6} = 27$

12. $7^{x^2-8x-9} = 1$

13. $2^{x+3} + 2^{x} = 144$

14. $4^{2x-1} + 4^{2x+1} = 4^{3} + 4^{5}$

15. $2^{x} - 2^{x-3} - 2^{x-4} + 2^{x-5} + 2^{x-6} = \dfrac{55}{64}$

16. $5^{2x+1} + 25^{x+1} = 5^{2x-1} + 149$

17. $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+1} - 2 \cdot 5^{x}$

18. $\dfrac{1}{2} \cdot 6^{x+1} + 3 \cdot 4^{x} = \dfrac{1}{3} \cdot 6^{x+2} - 6 \cdot 4^{x+1}$

19. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \cdot \left(8^{x+1} - 4^{5}\right) = 16\left(4^{x} - 8\right)$

20. $8 \cdot 2^{x} = 81 \cdot 3^{x-1}$

21. $3^{x+1} + 7^{x} = 3^{x} + 3 \cdot 7^{x}$

22. $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 4$

23. $3^{3x} \cdot 3^{1-2x} = 40$

Exponenzialgleichungen - Teil 2

Klasse 10

24. $5^{2x} \cdot 3^{3x+1} = 2025$

25. $4 \cdot 3^{x-2} - 20 \cdot 5^{x} = 2 \cdot 5^{x} - 6 \cdot 3^{x-1}$

26. $3^{x} + 4 \cdot 3^{-x} - 5 = 0$

27. $25^{x} - 5^{x+1} + 4 = 0$

28. $5^{x+2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = -124$

29. $3^{2x} \cdot 5^{4x-1} = 20$

30. $3^{2x+1} + 9 = 28 \cdot 3^{x}$

31. $9^{x} + 3^{x} = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 1\right)$

32. $9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} + 54 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 42 = 0$

33. $6 \cdot 3^{x} - 15 \cdot 5^{x} + 9 \cdot 3^{x} = 6 \cdot 5^{x}$

34. $10 + 5^{x} = 5^{x+1}$

35. $2^{x} + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

36. $9^{x} - 5 \cdot 4^{x+1} = 2 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 3^{2x}$

37. $3^{2x} - 7^{x+1} = 7^{x-1} - 9^{x+1}$

38. $3 \cdot 13^{3x+2} - 5 \cdot 12^{4x+3} + 3 \cdot 13^{3x+4} + 3 \cdot 12^{4x-1} = 4 \cdot 13^{3x+3} + 12^{4x+5} - 13^{3x+1}$

39. $27^{x^2 + x - 1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4x^2 + 2}$

40. $\left(\sqrt{5}\right)^{x} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{x+3} = 3 \cdot 19^{4-x}$

41. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2 + \lg x} = 2^{1 + \lg x}$

42. $3^{\log_5 x} = 5^{\log_3 x}$

43. $2^{\ln(3x)} = 3^{\ln(2x)}$

44. $e^{x} + e^{-x} = 2\sqrt{2}$

45. $\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = 2{,}5$

46. $\frac{e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}} = -\frac{4}{5}$

Exponenzialgleichungen - Teil 2

Klasse 10

Ergebnisse

(ausführliche Lösungen in GM_LU048)

1.	$\{-1, 1\}$	**2.**	$\{0, 3\}$
3.	$\{1{,}43067...\}$	**4.**	$\{1{,}8\}$
5.	$\left\{\frac{10}{7}\right\}$	**6.**	$\{4\}$
7.	$\{-3\}$	**8.**	$\left\{\frac{64}{11}\right\}$
9.	$\{-1\}$	**10.**	$\{4\}$
11.	$\{-1;\ 4{,}5\}$	**12.**	$\{-1;\ 9\}$
13.	$\{4\}$	**14.**	$\{2\}$
15.	$\{0\}$	**16.**	$\{0{,}5\}$
17.	$\{0\}$	**18.**	$\{2{,}709511...\}$
19.	$\{4\}$	**20.**	$\{-3\}$
21.	$\{0\}$	**22.**	$\{2\}$
23.	$\{2{,}35776...\}$	**24.**	$\{1\}$
25.	$\{-4{,}30132...\}$	**26.**	$\{0;\ 1{,}2618595...\}$
27.	$\{0;\ 0{,}861353...\}$	**28.**	$\{-2\}$
29.	$\{0{,}5333159...\}$	**30.**	$\{-1;\ 2\}$
31.	$\{0{,}5\}$	**32.**	$\{1{,}7095...\}$
33.	$\{-0{,}658683...\}$	**34.**	$\{0{,}569323...\}$
35.	$\{0{,}47326...\}$	**36.**	$\{1{,}8270432...\}$
37.	$\{-1{,}3388496...\}$	**38.**	$\{-0{,}535344...\}$
39.	$\{-1;\ 0{,}4\}$	**40.**	$\{8{,}04...\}$
41.	$\{10^{-1{,}5}\}$	**42.**	$\{1\}$
43.	$\{1\}$	**44.**	$\{0{,}88137...;\ -0{,}88137...\}$
45.	$\{1{,}64723...\}$	**46.**	$\{-4{,}394449...\}$

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

1.0 Gegeben sind die Punkte $A(0/-4)$, $C(0/4)$, sowie die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4\cos\alpha \\ 4\sin\alpha + 4 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in [-90°;\ 90°]$.

1.1 Zeichne die drei Punkte B_1, B_2 und B_3 mit $\alpha \in \{-30°;\ 0°;\ 30°\}$ in ein KOS.

1.2 Zeige: $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4\cos\alpha \\ 4\sin\alpha - 4 \end{pmatrix}$.

1.3 Zeige, dass für $\alpha \in [-90°;\ 90°]$ gilt: $[AB] \perp [CB]$.
Auf welcher Linie liegen also alle Punkte B ?

1.4 Bestimme die Koordinaten von B und den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α.

1.5 Für welches Winkelmaß α_0 wird die Dreiecksfläche am größten ? Gib diesen maximalen Inhalt an. Wie kann dieses Ergebnis auch durch geometrische Überlegungen gefunden werden ?

2.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 6\sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ 6\sin^2\alpha \end{pmatrix}$ mit $O(0/0)$ und $0° < \alpha < 90°$.

2.1 Zeichne die Pfeile für $\alpha \in \{30°; 45°; 60°\}$ in ein Koordinatensystem.

2.2 Im Punkt P wird jeweils die Senkrechte zu [OP] gezeichnet. Diese Senkrechte schneidet die positive x-Achse in T. Stelle die Koordinaten von T in Abhängigkeit von α dar.
[Ergebnis: $T(6\tan\alpha/0)$]

2.3 Für welches Winkelmaß α_4 ist $\overline{OP} = 3\text{cm}$?

2.4 Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks OTP in Abhängigkeit von α.
[Ergebnis: $A(\alpha) = 18\tan\alpha \cdot \sin^2\alpha\ \text{cm}^2$]

2.5 Tabellarisiere $A(\alpha)$ mit $\Delta\alpha = 10°$ und zeichne den Graphen.

3.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5\cos\alpha \\ 5\sin\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5\cos(\alpha + 90°) \\ 5\sin(\alpha + 90°) \end{pmatrix}$ mit $A(4/-3)$ und $0 \le \alpha \le 90°$.

3.1 Zeichne die Pfeile für $\alpha \in \{0°; 30°; 60°; 90°\}$ in ein Koordinatensystem.

3.2 Zeige, dass $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ für alle Winkelmaße α orthogonal sind.

3.3 Zeige, dass ΔABD für alle Werte von α gleichschenklig ist mit [BD] als Basis.
Ergänze die Dreiecke ABD zu Quadraten ABCD und bestimme die Koordinaten von C in Abhängigkeit von α.
[Ergebnis: $C(4 + 5\cos\alpha - 5\sin\alpha / -3 + 5\cos\alpha + 5\sin\alpha)$]

3.4 Für welchen Wert α_4 gilt $x_D = 4$?

3.5 Für welchen Wert α_5 liegt D auf der Geraden mit $y = -\frac{1}{3}x$?

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

4.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6\cos\alpha \\ 6\sin\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3\cos\alpha \\ 3\sin\alpha \end{pmatrix}$ mit $A(0/0)$ und $\alpha \in [\,0°;\ 90°\,]$ gegeben.
Das Dreieck ABD wird zum Parallelogramm ABCD ergänzt.

4.1 Zeichne die Pfeile und die Parallelogramme für $\alpha \in \{30°; 45°; 60°\}$.
Auf welcher Ortslinie bewegen sich alle Punkte B bzw. D ?

4.2 Bestimme die kartesischen Koordinaten von C in Abhängigkeit von α.

4.3 Bestimme den Flächeninhalt A des Parallelogramms ABCD in Abhängigkeit von α.

4.4 Bestimme das Winkelmaß α_4, für das der Flächeninhalt des Parallelogramms $AB_4C_4D_4$ maximal wird. Zeige rechnerisch, dass das Parallelogramm mit $\alpha_2 = 45°$ ein Rechteck ist. Formuliere das Ergebnis als Satz.

5.0 Gegeben sind die Punkte $A(0/0)$, $B(8/0)$ und der Pfeil $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2\sin\alpha - 8 \\ \sin\alpha + 4 \end{pmatrix}$ mit $-90° \le \alpha \le 90°$.

5.1 Zeichne die Dreiecke ABC für $\alpha \in \{-90°; -30°; 0°; 60°; 90°\}$ in ein Koordinatensystem.

5.2 Berechne die Koordinaten von C in Abhängigkeit von α.
[Ergebnis: $C(2\sin\alpha / \sin\alpha + 4)$]

5.3 Berechne die Gleichung des Trägergraphen aller Punkte C. Beachte dabei die Definitionsmenge !

5.4 Stelle den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α dar. Bestimme das Winkelmaß, für das der Flächeninhalt des Dreiecks extrem wird und gib den Inhalt an.
[Ergebnis: $A(\alpha) = 4(\sin\alpha + 4)$ FE]

5.5 Für welche Winkelmaße wird der Flächeninhalt höchstens 18 cm^2 ?

5.6 Für welche Winkelmaße wird das Dreieck ABC rechtwinklig ?

6.0 Gegeben ist das Dreieck ABC (bzw. ACB) mit $A(0/0)$, $B(6/2)$ und $C(3\sin\alpha / 9\cos^2\alpha)$ mit $\alpha \in [90°; 270°]$.

6.1 Zeichne die Dreiecke ABC mit $\alpha \in \{90°; 120°; 160°\}$ in ein Koordinatensystem.

6.2 Berechne die Koordinaten des Punktes C_4 mit $\sphericalangle BAC_4 = 90°$.

6.3 Es gibt zwei gleichschenklige Dreiecke ABC mit [AB] als Basis.
Berechne die Koordinaten der Eckpunkte C_5 und C_6.

6.4 Bestimme die Gleichung des Trägergraphen aller Punkte C und zeichne den Graphen ein. Beachte dabei $\alpha \in [90°; 270°]$.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

6.5 Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α.
[Ergebnis: $A(\alpha) = 3(9\cos^2\alpha - \sin\alpha)$ FE]

6.6 Bestimme das Maß α_7, für das $A = 27\frac{1}{12}$ cm^2 ist. Berechne die Koordinaten von C_7.

7.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8\tan\alpha \\ \frac{1}{\tan\alpha} \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
O ist der Koordinatenursprung; $\alpha \in [\,0°;\ 90°\,]$.

7.1 Zeichne für $\alpha \in \{10°; 30°; 60°\}$ die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \le x \le 15$; $-1 \le y \le 10$

7.2 Bestimme durch Rechnung die Gleichung der Ortslinie für alle Punkte A !

7.3 Für welche Werte für α stehen Pfeile $\overrightarrow{OA}$ senkrecht zu dem Pfeil $\overrightarrow{OB}$?

7.4 Die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ spannen Parallelogramme OACB auf. Bestimme die Koordinaten vom Eckpunkt C in Abhängigkeit von α ! Ermittle durch Rechnung die Gleichung der Ortslinie für alle Punkte C !

7.5 Berechne den Flächeninhalt A der Parallelogramme OACB in Abhängigkeit von α !

7.6 Für welche Werte für α wird der Flächeninhalt 33 FE groß ?

7.7 Berechne das Maß des Winkels zwischen den Pfeilen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ für $\alpha = 30°$!

8.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 4\cos^2\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $O(0/0)$ und $\alpha \in [0°; 180°]$.

8.1 Zeichne für $\alpha \in \{45°; 90°; 120°; 150°\}$ Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 2 cm; $-2 \le x \le 4$; $-1 \le y \le 9$

8.2 Bestimme die Gleichung der Ortslinie für alle Punkte B !

8.3 Für welchen Wert für α gibt es Pfeile $\overrightarrow{AB}$, die senkrecht zu $\overrightarrow{AD}$ stehen ?

8.4 Die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ spannen Parallelogramme ABCD auf.
Bestimme die Ortslinie für alle Punkte C !

8.5 Berechne die Länge der Pfeile $\overrightarrow{AB}$ in Abhängigkeit von α ! Berechne sodann für $\alpha = 150°$ die zugehörige Pfeillänge !

8.6 Für welche Werte von α gibt es gleichlange Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$?

8.7 Berechne das Maß des Winkels zwischen den Pfeilen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ für $\alpha = 45°$!

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

9.0 Die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\cos\alpha} \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5\cos\alpha \\ 5\sin\alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in [\,0°;\; 90°\,]$ und $O(0/0)$ sind gegeben.

9.1 Gib die Gleichung der Ortslinie für die Punkte P an !

9.2 Berechne die Länge der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ in Abhängigkeit von α ! Berechne die Länge der Pfeile $\overrightarrow{OR}$; mache sodann eine Aussage über die Ortslinie der Punkte R !

9.3 Zeichne Pfeile $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OR}$ für $\alpha \in \{0°; 45°; 60°\}$ und zeichne die Ortslinien für die Punkte P und R in ein Koordinatensystem !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \le x \le 7$; $-5 \le y \le 7$

9.4 Für welchen Wert für α gilt $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OR}|$?

9.5 Die Pfeile $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OR}$ spannen Parallelogramme OPQR auf.
Berechne die Koordinaten von Q in Abhängigkeit von α !

9.6 Unter dem Parallelogrammen gibt es ein Rechteck $OP_0Q_0R_0$.
Für welchen Wert für α ist dies der Fall ?
Bestimme sodann die Koordinaten der Punkte P_0, Q_0 und R_0, und zeichne das Rechteck $OP_0Q_0R_0$ in die Zeichnung zu 9.3 ein !

9.7 Unter den Parallelogrammen OPQR gibt es eine Raute OP*Q*R*.
Bestimme die Koordinaten von P*, Q* und R* !

10.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4\cos\alpha + 4 \\ 4\sin\alpha + 5 \end{pmatrix}$ mit $O(0/0)$ und $\alpha \in [0°; 360°[$.

10.1 Zeichne Pfeile $\overrightarrow{OC}$ für $\alpha \in \{0°; 30°; 60°; 90°; 120°; 180°; 270°; 330°\}$ und $\overrightarrow{OA}$ in ein Koordinatensystem !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \le x \le 10$; $-5 \le y \le 10$

10.2 Die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ spannen Parallelogramme OABC auf. Unter diesen Parallelogrammen gibt es zwei Rechtecke OAB_0C_0 und OAB*C*.
Für welche Werte für α existieren diese Rechtecke ?
Gib die Koordinaten von C_0 und C* an !

10.3 Berechne die Koordinaten der Punkte B in Abhängigkeit von α und berechne die Koordinaten von B_0 und B* !

10.4 Berechne den Flächeninhalt A der Parallelogramme OABC in Abhängigkeit von α !

10.5 Berechne die Länge der Pfeile $\overrightarrow{OC}$ in Abhängigkeit von α !
Für welche Werte für α gilt $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}|$?

10.6 Der Punkt $P(4/5)$ bildet mit den Punkten C Pfeile $\overrightarrow{PC}$. Berechne die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{PC}$, bestimme die Länge dieser Pfeile und nenne die Ortslinie für alle Punkte C !

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

10.7 Berechne das Maß φ des Winkels zwischen den Pfeilen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ für $\alpha = 150°$!

11.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6\cos\alpha \\ 6\sin\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3\cos\alpha \\ 3\sin\alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in]0°; 90°[$ und $O(0/0)$.

11.1 Zeichne Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ für $\alpha \in \{30°; 60°; 75°\}$ in ein Koordinatensystem !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \le x \le 7$; $-1 \le y \le 10$

11.2 Die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ spannen Parallelogramme OABC auf. Zeichne für die Werte von α aus 11.1 diese Parallelogramme in das KOS zu 11.1 ein, und berechne die Koordinaten des Eckpunktes B in Abhängigkeit von α !

11.3 Für welchen Wert für α stehen die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ senkrecht zueinander ?

11.4 Berechne den Flächeninhalt der Parallelogramme OABC in Abhängigkeit von α ! Bestimme α für das flächengrößte Parallelogramm !
[Ergebnis: $A = 18\sin 2\alpha$ FE]

11.5 Für welchen Wert von α wird der Flächeninhalt der Parallelogramme gleich 12 FE ?

11.6 Gibt es im angegebenen Intervall für α gleichlange Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$? Begründe die Antwort durch Rechnung !

12.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha \\ 2\sin\alpha - 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3\cos\alpha + 5 \\ 3\sin\alpha + 3 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in [0°; 180°]$ und $O(0/0)$.

12.1 Zeichne die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ für $\alpha \in \{0°; 30°; 90°; 180°\}$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \le x \le 9$; $-7 \le y \le 7$

12.2 Berechne das Maß β des Winkels zwischen den Pfeilen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ für $\alpha = 90°$!

12.3 Entscheide durch Rechnung, ob es Werte für α gibt, so dass $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ gilt !

12.4 Berechne die Beträge der Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ in Abhängigkeit von α !
Berechne die Beträge für $\alpha \in \{0°; 60°; 90°\}$!

12.5 Die Punkte P(0/-4) und Q(5/3) bilden mit den Punkten B und C Pfeile $\overrightarrow{PB}$ und $\overrightarrow{QC}$.
Gib die Koordinaten dieser Pfeile in Abhängigkeit von α an !
Berechne die zugehörigen Pfeillängen !
Auf welchen Ortslinien bewegen sich die Punkte B und C ?
Zeichne die Ortslinien in das Koordinatensystem zu 12.1 ein !

12.6 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AB_0C_0 für $\alpha = 65°$!

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

13.0 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit $O(0/0)$ als Ursprung sind Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{6\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \\ \frac{6\sin\varphi}{1+\sin\varphi} \end{pmatrix}$ gegeben, die mit der positiven x-Achse Winkel mit dem Winkelmaß φ und $\varphi \in [0°;180°]$ einschließen.

13.1 Bestimme die Länge der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ in Abhängigkeit von φ.

[Ergebnis: $\overline{OP} = \frac{6}{1+\sin\varphi}$ LE]

13.2 Ermittle mit Hilfe des Ergebnisses aus 13.1 die Winkelmaße φ so, dass $\overline{OP}$ möglichst groß bzw. möglichst klein wird.

13.3 Die Punkte P(x/y) mit den Koordinaten $x = \frac{6\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$ und $y = \frac{6\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$ liegen auf dem Graphen p.
Tabellarisiere x und y in Abhängigkeit von $\varphi \in [0°;180°]$ in Schritten von $\Delta\varphi = 30°$.
Zeichne sodann den Graphen p für das angegebene Intervall in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{LE}$.

13.4 Der Fußpunkt des Lotes von einem Punkt $P \in p$ auf die x-Achse ist Q. Rotiert das Dreieck OQP um die x-Achse, so entsteht als Rotationskörper ein gerader Kreiskegel. Trage das Dreieck OQP für $\varphi = 30°$ in das Koordinatensystem zu 13.3 ein.

13.5 Stelle die Mantelfläche M des Rotationskörpers in Abhängigkeit von φ dar.

[Ergebnis: $M(\varphi) = \pi \cdot \frac{36\sin\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}$ FE]

13.6 Für welche Belegungen von φ nimmt die Mantelfläche M den Wert 8π FE an ?

14.0 Die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1-\sin\alpha \\ 2\sin\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ spannen Parallelogramme OPRQ auf.

14.1 Stelle eine Wertetabelle für $\alpha \in \{10°; 20°; 45°; 60°\}$ auf, und zeichne die Parallelogramme OPRQ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 5 cm; $-1 \le x \le 1$; $0 \le y \le 2{,}5$

14.2 Gib den Flächeninhalt $A(\alpha)$ der Parallelogramme OPRQ in Abhängigkeit von α an.

[Ergebnis: $A(\alpha) = 0{,}4(1+3\sin\alpha)$ FE]

14.3 Für welches Winkelmaß α erhält man ein Parallelogramm mit 1,4 FE Inhalt ?

14.4 Ermittle das Winkelmaß α^*, für das sich das flächengrößte Parallelogramm OPRQ ergibt. Gib A_{max} an.

14.5 Zeige, dass die Pfeilspitzen P eine Gerade beschreiben, indem du ihre Gleichung ermittelst.
Anleitung: Für P(x/y) gilt $x = 1-\sin\alpha \quad \wedge \quad y = 2\sin\alpha$. Eliminiere nun $\sin\alpha$.

14.6 Begründe, dass auch die Punkte R auf einer Geraden liegen.
Welche Gleichung hat diese Gerade ?

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

15.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\alpha} \\ 2\sin\alpha \end{pmatrix}$.

15.1 Erstelle eine Wertetabelle für $\alpha \in [15°; 75°]$ mit $\Delta\alpha = 15°$, und zeichne die Pfeile im Koordinatensystem. Längeneinheit ist 1 cm. Platzbedarf: $-5 \le x \le +5$; $-4 \le y \le +4$.

15.2 Begründe, dass man anhand der Wertetabelle in 15.1 auch die Koordianten der Pfeile für $\alpha \in]90°; 360°[$ angeben kann. Zeichne sie in das Koordinatensystem zu 15.1 ein.

15.3 Zeige, dass die Pfeilspitzen P auf einer Hyperbel liegen, und ermittle ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten.

16. Führe die Aufgabe 15 mit den Pfeilen $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin^2\varphi + 2\cos\varphi \end{pmatrix}$ durch, und zeige, dass die Pfeilspitzen P auf einer Parabel liegen.

17.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2+\sin\varphi \\ \cos^2\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\cos^2\varphi \end{pmatrix}$.

17.1 Berechne die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ für $\varphi \in \{0°; 20°; 40°; 60°; 270°; 300°; 320°; 340°\}$, und trage die Punkte in ein Koordinatensystem mit 2 cm als Längeneinheit ein. Platzbedarf: $0 \le x \le 4$; $0 \le y \le 4$

17.2 Begründe, dass die Pfeile mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} 2+\sin\varphi \\ \frac{1}{3}(2+\sin\varphi)^2 \end{pmatrix}$, die jeweils dieselben x-Koordinaten wie die Pfeile $\overrightarrow{OP}$ haben, zu den Pfeilen $\overrightarrow{OQ}$ gehören.

17.3 Gemäß Aufgabe 17.2 gilt $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2+\sin\varphi \\ \frac{1}{3}(2+\sin\varphi)^2 \end{pmatrix}$. Die Differenz Δy der y-Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{OQ}$ und $\overrightarrow{OP}$ gibt somit die Maßzahl der Entfernung $\overrightarrow{QP}$ an. Stelle diese Differenz Δy in Abhängigkeit von φ dar, und zeige durch Umformung, dass sich die beiden Graphen berühren. Berechne die kartesischen Koordinaten des Berührpunktes sowie das zugehörige Winkelmaß φ.

17.4 Stelle die Pfeile $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ durch kartesische Koordinaten dar, und zeige damit, dass beide Graphen Parabeln sind.
Lösungshinweis: Beachte die Anleitung bei Aufgabe 14.5.
[Ergebnis: $p_1 : y = -(x-2)^2 + 1$; $p_2 : y = \frac{1}{3}x^2$]

17.5 Zeige erneut mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 17.4, dass sich die beiden Parabeln p_1 und p_2 berühren, und berechne die kartesischen Koordinaten des Berührpunktes.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

18.0 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit $O(0/0)$ als Ursprung sind Pfeile
$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{6\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \\ \frac{6\sin\varphi}{1+\sin\varphi} \end{pmatrix}$ gegeben mit $\varphi \in [0°;180°]$. siehe auch Aufgabe 13 !
Dabei ist φ das Maß des Winkels zwischen der positiven x-Achse und den Pfeilen $\overrightarrow{OP}$.

18.1 Bestimme die Länge der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ in Abhängigkeit von φ, und ermittle die Winkelmaße für φ, so dass $\overline{OP}$ möglichst groß bzw. möglichst klein wird.

18.2 Die Endpunkte P der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ liegen auf dem Graphen p. Gib für $\varphi \in [0°;180°]$ mit $\Delta\varphi = 30°$ die Koordinaten der Punkte P an, und zeichne den Graphen p für das angegebene Intervall in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).

18.3 Bestätige durch Rechnung, dass die Spitzen P der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ auf dem Graphen zu $y = -\frac{1}{12}x^2 + 3$ liegen.

18.4 Fällt man von $P \in p$ das Lot auf die x-Achse, so erhält man als Lotfußpunkt Q.
Rotieren sodann die Dreiecke mit den Eckpunkten O, Q und P um die x-Achse, so entstehen Kegel.
Stelle die Mantelfläche A_M der Kegel in Abhängigkeit von φ dar.

[Ergebnis: $A_M = \frac{36\cdot\pi\cdot\sin\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}$ FE]

18.5 Für welche Belegungen von φ nimmt die Mantelfläche A_M den Wert 8π FE an ?

19.0 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit O(0/0) als Ursprung sind Pfeile
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 8\cos\varphi \\ 8\sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -4\cos\varphi \\ 4\sin\varphi \end{pmatrix}$ mt $\varphi \in [0°; 90°]$ gegeben.
Die Parallelen zu OB und OD durch D bzw. B schneiden sich im Punkt C.

19.1 Ermittle für $\varphi = 30°$ die Koordinaten der Punkte B und D, und zeichne das Parallelogramm OBCD in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm. Platzbedarf: $-4 \le x \le 7$; $-1 \le y \le 6$

19.2 Bestimme die Koordinaten des Eckpunktes C der Parallelogramme in Abhängigkeit von φ.

19.3 Berechne den Flächeninhalt der Parallelogramme OBCD in Abhängigkeit von φ.

[Ergebnis: $A(\varphi) = 32\sin 2\varphi$ FE]

19.4 Tabellarisiere $A(\varphi)$ für $\varphi \in [0°; 90°]$ mit $\Delta\varphi = 15°$, und zeichne den Graphen von A in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: φ – Achse : 1 cm entspricht 10°; A – Achse : 1 cm entspricht 10 FE.

19.5 Bestimme das Maß φ^*, für das die Fläche des zugehörigen Parallelogramms den größten Wert annimmt. Gib A_{max} an.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

20. Der Punkt B(8/-1) ist ein Eckpunkt einer Raute ABCD, deren Diagonalenschnittpunkt M(4/2) ist und bei der $\sphericalangle DCB = 60°$ gilt.
Zeichne die Raute ABCD in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit, und berechne die fehlenden Eckpunktkoordinaten.

21. In einem Drachenviereck ABCD mit B(3/8), C(x/7) und D(0/2) ist AC die Symmetrieachse, und es gilt $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC = 90°$. Zeichne das Drachenviereck ABCD in ein Koordinatensystem, und berechne die fehlende Koordinate des Punktes C sowie die Koordinaten des Punktes A.

22. Zeichne die Raute ABCD mit A(-0,5/y), B(6,5/1,5) und D(-2,5/4,5) in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit.
Berechne die fehlende Koordinate des Punktes A, die Koordinaten des Punktes C, die Innenwinkel und den Flächeninhalt der Raute.

23. Der Eckpunkte D einer Raute ABCD mit A(0/3,5) und C(6/1,5) liegt auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 6$. Zeichne die Raute ABCD, und berechne die Koordinaten der Eckpunkte D und B.

24. Die Eckpunkte D von Rauten ABCD mit A(1/-2) und C(7/4) liegen auf der Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 - 2x + 3$.
Zeichne die möglichen Rauten ABCD in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit, und berechne die Koordinaten der Punkte D und B.

25. Die Punkte $A(-1/y_A)$ und $B(2/y_B)$ liegen auf der Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 + 2$. Zeichne Punkte C auf der Parabel p, so dass die Punkte A, B und C Dreiecke bilden, die bei A oder bei B rechtwinklig sind. Berechne die Koordinaten der Punkte C.

26. Die Punkte A(7/-0,5) und B(9/3,5) bilden zusammen mit Punkten C der Parabel p mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ Dreiecke ABC, die bei A oder bei B rechtwinklig sind.
Zeichne die möglichen Dreiecke ABC, und berechne die Koordinaten der Punkte C.

27.0 Die Punkte A(0/0), B(4/-3) und $C_n(2k / -\frac{k}{2} + 8)$ mit $k \in \mathbb{R}$ bilden Dreiecke ABC_n.

27.1 Zeichne das Dreieck ABC_1 für k = 0 in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit, und berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABC_1.

27.2 Unter den Dreiecken ABC_n gibt es zwei rechtwinklige Dreiecke ABC_2 und ABC_3. Zeichne diese beiden rechtwinkligen Dreicke ein, und berechne die Koordinaten der Punkte C_2 und C_3 sowie die Innenwinkelmaße der Dreiecke.

27.3 Zeichne die Dreiecke ABC_4 mit $\sphericalangle BAC_4 = 60°$ und ABC_5 mit $\sphericalangle BAC_5 = 150°$ ein, und berechne die Koordinaten der Punkte C_4 und C_5.

27.4 Zeige rechnerisch, dass die Eckpunkte C_n der Dreiecke ABC_n auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -\frac{1}{4}x + 8$ liegen.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

27.5 Zeichne das Dreieck ABC_0 ein, das gleichschenklig mit [AB] als Basis ist, und berechne die Koordinaten des Punktes C_0, den zugehörigen Wert für k und die Maße der Dreiecksinnenwinkel.

27.6 Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks ABC_6 mit einem Flächeninhalt von 18 FE ?

27.7 Bestimme mit Hilfe des Skalarprodukts der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC_n}$ die Definitionsmenge D(k) für k, so dass Dreiecke ABC_n entstehen.

