Gymnasium / Realschule

Affine (lineare) Funktionen $f(x) = mx + t$

Klassen 9 - 11

1. Gib die Gleichung einer Geraden durch P mit der Steigung m an:

a) $P(0|0)$; $m = -2$

b) $P(1|2)$; $m = \frac{2}{3}$

c) $P(-4|0)$; $m = 0$

2. Gegeben sind die Punkte P und Q. Gib die Gleichung der Geraden PQ an.
Wie ist jeweils die Steigung ?

a) $P(-3|5)$; $Q(2|6)$

b) $P(-4|-5)$; $Q(3|-8)$

3. Wie lautet die affine (lineare) Funktion, deren Graph parallel zur Geraden $f(x) = 0{,}6x - 4$ verläuft und den Punkt $A(2|-6)$ enthält ? $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

4. Gib die affine (lineare) Funktion an, deren Graph die Nullstelle $x_0 = 2{,}5$ hat und die y-Achse im Punkt $P(0|-8)$ schneidet. $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

5. Die Gerade g hat die Gleichung: $y = 0{,}75x + 2$.

a) Stelle die Gleichung derjenigen Geraden h auf, die parallel zu g und durch den Punkt $P(3|7)$ verläuft.

b) Ermittle die Gleichung der orthogonalen Geraden k zu g durch den Ursprung.

6. Bestimme Schnittpunkt und Schnittwinkel der Graphen g_1: $f(x) = 2x$ mit g_2: $g(x) = -0{,}5x+1$.

7. Gegeben ist die Funktion g: $x \mapsto 2x - 1{,}2$. $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$

a) Zeichne den Graphen G_g der Funktion.

b) Der Punkt $Q(-2|y_Q)$ liegt auf G_g . Bestimme y_Q .

c) Durch Q soll eine Gerade h verlaufen, die mit G_g einen Winkel von 40° bildet.
Wie lautet die Geradengleichung ?

8. Berechne den Schnittwinkel der beiden Diagonalen AC und BD des Vierecks ABCD mit $A(6|2)$; $B(1|7)$; $C(-3|-1)$ und $D(4|-2)$.

9. Durch den Punkt $P(2|y_P)$ mit $P \in G_f$ soll eine Gerade gelegt werden, die mit der Geraden $f(x) = -2x + 2$ einen Winkel von 45° bildet. Erstelle die Geradengleichung.

10. Gegeben sei die affine Funktion f: $f(x) = \sqrt{3}\,x - \frac{1}{3}\sqrt{3} + 3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

a) Fertige eine Zeichnung von f im Koordinatensystem an.

b) Der Punkt $P(x_P|\,3\sqrt{3}\,)$ liegt auf dem Graphen zu f. Berechne x_p .

c) Wie lautet die Funktion g(x) deren Graph mit dem Graphen von f einen Winkel von 120° bildet und die durch P verläuft ?

11. Der Neigungswinkel einer Geraden zur x-Achse beträgt 30°. Die Gerade verläuft durch den Punkt R(-2|-5). $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

a) Wie lautet die Funktionsgleichung ?

b) Berechne die Schnittpunkte des Graphen mit den Achsen.

c) Gib die Gleichung der Geraden an, die durch den Koordinatenursprung verläuft und auf der gegebenen Geraden senkrecht steht.

d) Wie heißt die Umkehrfunktion zur gegebenen Geraden ?
Gib deren Steigungswinkel α an.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

1. Erkläre folgende Begriffe:

a) Ursprungsgerade

b) Steigung bzw. Steigungsdreieck

c) Steigende u. fallende Gerade

d) Geradenbüschel, Parallelenschar

e) y-Achsenabschnitt

f) Lineare Funktion

g) Normalform der linearen Funktion

2. Zeichne die durch folgende Gleichungen gegebenen Geraden in ein Koordinatensystem und gib zu jeder Geraden ihre Steigung an.

a) $y = 2x$ b) $y = -\frac{1}{3}x$ c) $y = -4{,}5x$ d) $-2x - 3y = 0$

e) $\frac{1}{3}y + \frac{2}{5}x = 0$ f) $3y - 3x = 0$

3. Prüfe <u>durch Rechnung</u> nach, ob folgende Punkte auf der jeweiligen Geraden liegen.

a) $P_1\left(-\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{5}\right)$; $P_2\left(-0{,}6\,\middle|\,-1{,}5\right)$ $g_1:\ 5x - 2y = 0$

b) $A(6\,|\,3)$; $B(-5\,|\,-2)$ $g_2:\ -5y + 2x = 0$

4. Gib jeweils die Gleichung der Geraden an, die durch den Ursprung (0 I 0) und einen der folgenden Punkte verläuft.

a) $A(2{,}5\,|\,-3)$ b) $B(-4{,}5\,|\,0)$ c) $C\left(\frac{1}{3}\middle|-1\frac{2}{5}\right)$

Anleitung: Die Gleichung einer Ursprungsgeraden hat die Form y = mx.
Die Koordinaten der Punkte gehören zur Lösungsmenge. Setze die Koordinaten der Punkte für x und y ein und ermittle damit m.

5. Prüfe <u>durch Rechnung</u>, ob folgende Punkte auf derselben Ursprungsgerade liegen

a) $A_1(0{,}3\,|\,2{,}7)$ $A_2(0{,}6\,|\,0{,}54)$

b) $B_1\left(\frac{1}{5}\middle|\,0{,}8\right)$ $B_2\left(0{,}4\,\middle|\frac{8}{5}\right)$

c) $C_1(6\,|\,3)$ $C_2(-6\,|\,-3)$

6. Gegeben sind die Funktionen $g_1: y = -\frac{1}{4}x$ und $g_2: -5y + 12x = 0$

Zeichne jeweils den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem und dazu den Graph der entsprechenden Umkehrfunktion g_1^{-1} und g_2^{-1}. Gib die Funktionsgleichung der Umkehrfunktionen an.

Hinweis: Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung der Funktion an der Geraden y = x.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

7. Gegeben sind die Geraden $g_1: y - 0{,}45x = 0$ und $g_2: 6x + 10y = 0$.

Zeichne die gegebenen Geraden und die im Koordinatenursprung auf ihnen senkrecht stehenden Geraden. Ermittle deren Funktionsgleichung.

8. Bestimme durch Zeichnung und Rechnung die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen ($x = 0$, $y = 0$)

a) $5x - 2y + 1 = 0$ b) $y = -2(x+2) + 6$ c) $0{,}75(x+2) - 3 - y = 0$

9. a) Die Gerade g hat die Steigung $m = 2{,}5$ und verläuft durch den Punkt $S(-3 \mid -17)$. Wie lautet die Geradengleichung in der Normalform?

b) Ermittle durch Rechnung die Normalform einer Geradengleichung deren y-Achsenabschnitt $-4{,}5$ ist und deren Graph durch den Punkt $A\left(-\frac{2}{3} \middle| \frac{5}{6}\right)$ verläuft.

10. Bestimme die Gleichungen der Geraden durch folgende Punkte mit drei verschiedenen Lösungswegen.

a) $A(0 \mid -3)$ und $B(1{,}5 \mid 4)$

b) $P(-6 \mid -7)$ und $Q(-11 \mid 2{,}5)$

c) $S(12 \mid 1{,}5)$ und $T(8 \mid -1{,}5)$

11. Die Punkte $A(0 \mid -4)$ und $B(10 \mid 0)$ liegen auf der Geraden g, die Punkte $P(-0{,}5 \mid 11)$ und $Q(8{,}5 \mid -2{,}5)$ liegen auf der Geraden h.

Bestimme durch Rechnung jeweils die Funktionsgleichung der beiden Geraden und die Koordinaten ihres Schnittpunkts S.

Ermittle die Schnittpunkte der Geraden h mit den Koordinatenachsen.

12. a) Gegeben sind die beiden Funktionen $f: y = -0{,}5x + 3$ und $g: 3x - 2y = 6$. Zeichne die zu den Funktionen gehörenden Graphen in ein Koordinatensystem und **berechne** ihren gemeinsamen Schnittpunkt.

b) Gegeben sind zwei **unvollständige** lineare Funktionen:

$g: y = -4x + ...$

$h: y = ...x + 5$

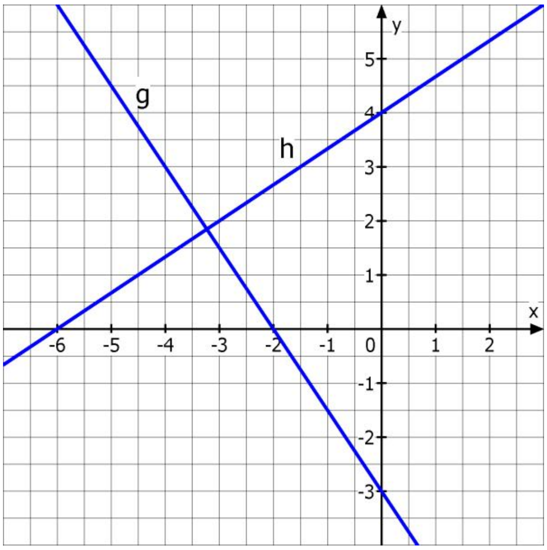
Vervollständige beide Funktionsgleichungen für folgende Bedingungen:
Beide Geraden stehen senkrecht aufeinander, und
die Gerade g verläuft durch den Punkt $P(-2{,}5 \mid 12)$

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

13. a) Gegeben sind die Geraden g und h zweier linearer Funktionen (siehe nebenstehendes Bild).

Zeichne zu jeder Geraden ein Steigungsdreieck und gib die beiden Geradengleichungen an.

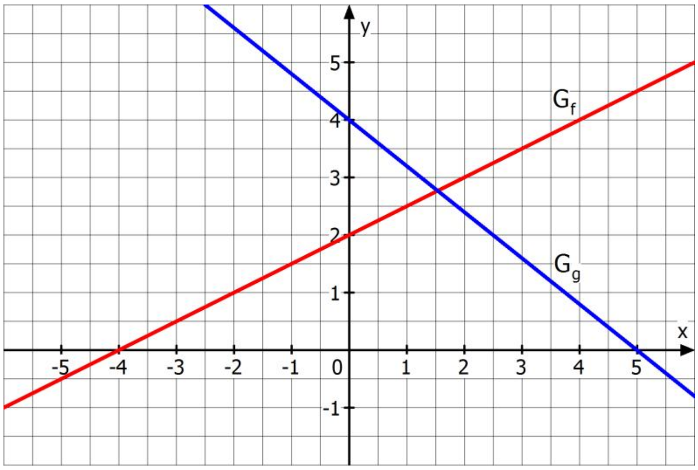


b) Bestimme die Gleichung der Geraden s, die parallel zur Geraden $y = -0{,}2x + 16$ und durch den Punkt $R\left(-3\,\middle|\,-1\right)$ verläuft.

c) Bestimme die Gleichung der Geraden t, die durch den Punkt $S\left(-3\,\middle|\,-4\right)$ verläuft und die x-Achse bei $x = 5$ schneidet.

14. a) Gib zu den Graphen G_f und G_g jeweils die Zuordnungsvorschrift an. Lese günstige Werte aus dem Diagramm ab.

b) Begründe rechnerisch, ob der Punkt $P\left(-40\,\middle|\,-17{,}5\right)$ genau auf, über oder unter dem Graphen G_f liegt.



15. Gegeben ist die Gerade g mit $y + 3{,}5(x-2) + 5 = 0$.

Bestimme die auf der gegebenen Geraden senkrecht stehende Gerade h. Der Schnittpunkt beider Geraden soll auf der x-Achse liegen. Gib die Geradengleichung von h an.

16. Die Gerade $g:\ y = -\frac{5}{4}x + 5$ bildet zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechne seinen Flächeninhalt. $(1\,\text{LE} = 1\,\text{cm})$

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

17. Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = 2{,}5x - 2$.

a) Zeige, dass der Punkt $P(4 \mid 8)$ auf g liegt.

b) Bestimme die Gleichung der Geraden f, die durch P geht und senkrecht auf g steht (Skizze !).

c) Die beiden Geraden schneiden die Senkrechte $x = -1$ in den Punkten R und S. Berechne die Fläche des Dreiecks PRS (Skizze !)

18. Gegeben sind die beiden Geradengleichungen $m:\ y = 3x - 1$ und $n:\ y = -\frac{3}{2}x + 8$.

a) Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt S der beiden Geraden.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das die Geraden m und n mit der x-Achse einschließen. (Skizze!)

19. a) Zeichne die Gerade $g:\ y = -\frac{2}{3}x + 3$ in ein Koordinatensystem. Spiegle die Gerade g sowohl an der x-Achse als auch an der y-Achse als auch am Ursprung. Gib jeweils die Funktionsgleichungen an.

b) Die vier Geraden aus Teilaufgabe a) schließen ein Viereck ein. Ermittle den Flächeninhalt dieses Vierecks. $(1\,\text{LE} = 1\,\text{cm})$

20. a) Zeichne die Menge aller Punkte $S(x \mid -0{,}5x + 2)$ in ein Koordinatensystem $(x \in \mathbb{Q})$. Auf welcher Ortslinie liegen sie?

b) Die Punkte S werden mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ parallel verschoben. Die Bildpunkte heißen T. Zeichne die Ortslinie der Punkte T ein. Gib die Menge aller Punkte T in Koordinatenschreibweise an.

21. Die Gleichung $y = 3x - (a + 2)$ mit $a \in \mathbb{Q}$ beschreibt bezüglich $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ die Parallelenschar g(a).

a) Gib die Gleichung der Scharparallelen g_1 an, die durch den Punkt $A(-6 \mid 1{,}5)$ verläuft.

b) Belegt man a einmal mit 2 und dann mit -8, erhält man zwei Geraden g_2 und g_3. Ermittle die Gleichung der Mittelparallelen g_4 zu den Parallelen g_2 und g_3. Gib die zugehörige Zahl a an.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

22. Gegeben ist die Gleichung einer Parallelenschar g(t): $y = -2x + t$.

a) Prüfe rechnerisch, ob die Gerade g_1: $2x - 3y + 5 = 0$ der Parallelenschar angehört.

b) Für welchen Wert von t erhält man jeweils die Gleichung der Schargeraden, die durch die Punkte $A\left(-2 \mid 3\right)$ und $B\left(1{,}5 \mid -8\right)$ verlaufen?

c) Gibt es eine Schargerade die zugleich durch die Punkte $P_1\left(-4 \mid 4\right)$ und $P_2\left(3 \mid -5\right)$ verläuft? Zeige dies rechnerisch.

d) Wie lautet die Gleichung der Parallelenschar h(t), deren Geraden auf denen der gegebenen Schar g(t) senkrecht stehen?

23. Alle Geraden, die einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, gehören einem Geradenbüschel an.

a) Durch welchen Punkt Q verlaufen alle Geraden des Geradenbüschels $g(m): y = mx + 3$?

b) Für welche Werte von m erhält man die Gleichungen der Büschelgeraden, die durch die Punkte $A\left(0{,}4 \mid 3\right)$, $B\left(-2 \mid 4\right)$ und $C\left(2{,}5 \,\middle|\, -\frac{1}{3}\right)$ verlaufen?

c) Zeige rechnerisch, ob es eine Büschelgerade gibt, die gleichzeitig durch die Punkte $U\left(2 \mid 5\right)$ und $V\left(-3 \mid 0\right)$ verläuft.

d) Ein zweites Geradenbüschel h(m) hat den Büschelpunkt $R\left(3 \mid 4\right)$. Gib die Gleichung des Geradenbüschels an.

e) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die beiden Büscheln gleichzeitig angehört?

f) Gib die Gleichungen der Geraden beider Büschel an, die auf der Geraden mit $y = \frac{1}{3}x + 3$ senkrecht stehen.

24. Das Geradenbüschel g(m) mit $y - mx + 2m + 5 = 0$ und die Parallelenschar g(t) mit $y - 2x - t = 0$ sind gegeben.

a) Bringe die Büschelgleichung auf die Form $y = m\left(x - x_1\right) + y_1$ (Punkt-Steigungsform) und gib die Koordinaten des Büschelpunktes B an.

b) Zeichne den Büschelpunkt, die Büschelgeraden für $m \in \left\{0; \pm 1; \pm 3\right\}$ und die Schargeraden für $t \in \left[-4;\ 4\right]_{\mathbb{Z}}$ in ein Koordinatensystem.

c) Gib die Gleichung derjenigen Büschelgeraden an, die auch Ursprungsgerade ist.

d) Welche Gerade der Parallelenschar ist gleichzeitig Büschelgerade?

e) Welche der Büschelgeraden steht auf allen Schargeraden der Parallelenschar senkrecht?

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

25. Gegeben sind die Punkte $P(0\,|\,2)$ und $Q(k\,|\,-2)$.

a) Stelle in Abhängigkeit vom Parameter k die Funktionsgleichung der Schar $f_k(x)$ auf, die durch die Punkte P und Q bestimmt wird. Welche Werte darf hierbei der Parameter k annehmen?

b) Bestimme die Schnittpunkte S_x und S_y der Funktionenschar mit den Koordinatenachsen in Abhängigkeit vom Parameter k.

c) Gib diejenigen Geraden aus der Schar an, die parallel zur x-Achse bzw. parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten verlaufen.

d) Welche Gerade aus der Schar steht senkrecht auf der Geraden $h(x) = -4x + 3$? Gib die Gleichung dieser Geraden an. Bestimme außerdem den Schnittwinkel dieser Geraden mit der x-Achse.

e) Haben alle Geraden der Funktionenschar einen gemeinsamen Schnittpunkt? Wenn ja, gib diesen an.

26. Eine Gerade g verläuft durch den Punkt $P(1\,|\,3)$ und hat eine Nullstelle bei x = 5.

a) Erstelle die Funktionsgleichung.

b) Berechne den Neigungswinkel α gegen die x-Achse.

c) $Q(3\,|\,q)$ soll stets unterhalb von g liegen. Welche Bedingungen muss q erfüllen?

27. Gegeben ist die Gerade $g: f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$.

a) Erstelle die Gleichung aller Geraden, die zu g parallel sind.

b) Erstelle die Gleichung aller Geraden, die den gleichen Schnittpunkt mit der y-Achse haben.

28. Gegeben ist der Punkt $P(4\,|\,1)$ und die Funktionenschar mit der Gleichung

$f_m(x) = (m-1)x + 2m\,; \quad m \in \mathbb{R}$

a) Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die den Punkt P enthält.

b) Bestimme die Gleichung der Geraden aus der Schar, die auf $h(x) = -2x + 8$ senkrecht steht.

c) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte S_x und S_y mit den Koordinatenachsen.

d) Gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt aller Geraden der Schar?

e) Zeichne die in a) und b) ermittelten Geraden in ein Koordinatensystem ein.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

29. Gegeben ist die Geradenschar $g_k : y = (2k-1)x + k; \quad k \in \mathbb{R}$

a) Für welches k verläuft die zugehörige Gerade der Schar durch $P(1|-3)$?
Gib die entsprechende Funktionsgleichung an.

b) Bestimme k so, dass die Schargerade parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten verläuft.

c) Berechne die Nullstelle sowie den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse in Abhängigkeit von k.

d) Gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt aller Geraden der Schar?

30. Die Geraden einer Schar haben folgende Eigenschaft:

Die Koordinatenachsen und eine Schargerade bestimmen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck im ersten Quadranten mit dem Flächeninhalt 8 FE. (FE = Flächeneinheiten)

Bestimme die Scharfunktion f in Abhängigkeit von der Nullstelle der Schargeraden mit der x-Achse.

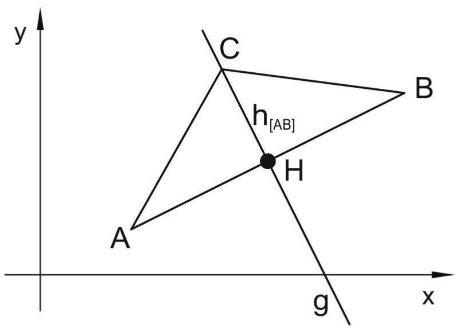
31. Ein Zeichner will die Gerade mit der Gleichung $2x - \frac{1}{3}y + 6 = 0$ durch die Punkte

$P_1\left(\frac{2}{3}\middle|7{,}5\right)$ und $P_2\left(\frac{1}{3}\middle|20\right)$ ziehen. Liegen die Punkte auf der Geraden?

32. Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit $A(2|1)$.

Die Dreieckshöhe $h_{[AB]}$ liegt auf der Geraden g: $y = -2x + 12{,}5$.

Berechne die Koordinaten des Höhenfußpunktes H. (siehe nebenstehende Skizze).



33. Gegeben sind die Gerade g mit $y + \frac{2}{3}x - 4 = 0$ und

der Punkt $P(12|15{,}5)$.
Der Punkt P ist mit g als Spiegelachse mittels Achsenspiegelung auf P' abzubilden.

Berechne die Koordinaten von P'.

34. Die Geraden $g_1 = \overline{AB}$ mit $A(-1{,}5|0)$ und $B(0|3)$ sowie $g_2 = \overline{CD}$ mit $C(0|-2)$ und $D(6|0)$ als auch $g_3 = \overline{EF}$ mit $E(8|1)$ und $F(2|9)$ sind gegeben.

Ermittle zeichnerisch **und** rechnerisch die Punkte $S \in g_1$ und $T \in g_2$ deren Verbindungsstrecke [ST] zu g_3 parallel verläuft und 6 cm lang ist.

(Koordinatensystem: 1LE = 1cm)

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

35. Der Neigungswinkel einer Geraden g beträgt 60°. Auf ihr liegt der Punkt $P\left(-4\,\middle|\,0{,}5\right)$.

a) Stelle die Funktionsgleichung auf (keine Näherungswerte).

b) Berechne die Schnittpunkte des Graphen mit den Achsen.

c) Wie heißt die Funktion h mit derselben Nullstelle, deren Graph die Steigung $m = -\frac{1}{5}$ hat?

36. Gegeben ist die Gerade $g:\ y = -x + 2;\quad D = \mathbb{R}$

Durch den Punkt $P\left(1\,\middle|\,1\right) \in g$ soll eine Gerade h gelegt werden, die mit der Geraden g einen Winkel von 30° bildet. Wie lautet die Gleichung der Geraden h ?
(zwei Möglichkeiten)

37. Gegeben sind ein Achsenschnittpunkt $N\left(-3\,\middle|\,0\right)$ einer Geraden und der Abstand $\overline{NT} = 5$ der beiden Achsenschnittpunkte.

Berechne die Koordinaten des zweiten Achsenschnittpunktes T und stelle die Gleichung der Geraden auf (2 Möglichkeiten).

38. Gegeben ist die Scharfunktion $f_t(x) = tx - |t|;\quad t \in \mathbb{R};\quad D_f = \mathbb{R}$

a) Welche Nullstellen haben die Scharfunktionen?

b) Für welche Werte von t schneiden sich zwei Schargeraden auf der y-Achse?

39. Gegeben ist die Scharfunktion $g_a(x) = |a|x + a;\quad a \in \mathbb{R};\quad D_g = \mathbb{R}$

a) Welche Nullstellen hat diese Schar?

b) Für welche Werte von a sind zwei Geraden aus der Schar zueinander parallel?

40. Gegeben ist die Scharfunktion $g_t(x) = -tx + t;\quad t \in \mathbb{R};\quad D_g = \mathbb{R}$

a) Zeige, dass alle Graphen der Schar eine gemeinsame Nullstelle haben.

b) Bestimme den Inhalt der Dreiecksfläche, die von der y-Achse und zwei zueinander senkrechten Schargeraden begrenzt ist.

c) Für welches t schließt die Schargerade mit der y-Achse einen Winkel von 30° ein?

41. Die beiden Achsenschnittpunkte jeder Schargeraden haben voneinander den Abstand 10 LE.

Bestimme die Gleichungen aller Geraden. Zeichne eine dieser Geraden.

42. Gegeben sind die Punkte $A\left(-4\,\middle|\,-3\right);\ B\left(4\,\middle|\,-3\right);\ C\left(x\,\middle|\,\sqrt{25-x^2}\right)$

Die beiden festen Punkte A, B und der variable (von x abhängige) Punkt C bestimmen ein Dreieck. Ermittle den Winkel $\gamma = \sphericalangle ACB$ bei C.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

43. Gegeben ist die Scharfunktion $f_t(x) = tx + 2\sqrt{t^2+1}$; $t \in \mathbb{R}$; $D = \mathbb{R}$

a) Für welches t ist der Graph parallel zur Winkelhalbierenden des 1.Quadranten?

b) Für welches t ist der Graph senkrecht zu einer Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 350$?

c) Welche Graphen der Schar schließen mit der x-Achse einen Winkel von 60° ein?

d) Bei welchen t-Werten sind die Nullstellen vom Ursprung $2\sqrt{2}$ entfernt?

e) Welche Bereiche der x-Achse sind keine Nullstellen von Schargeraden?

f) Bestimme die Entfernung d, die die beiden Achsenschnittpunkte der Geraden zum Parameterwert $t = 5$ haben.

g) Bestimme die Entfernung der Achsenschnittpunkte einer Schargeraden allgemein.

h) Für welches t beträgt die Entfernung der Achsenschnittpunkte genau 4 LE?

i) Zeichne die zu $t \in \{0; \pm 0,2; \pm 0,5; \pm 1; \pm 2; \pm 4\}$ gehörenden Graphen.

Quadratische Funktionen

Klassen 9 - 11

Parabelgleichung ermitteln

1. Ermittle die Gleichung der nach oben geöffneten Normalparabel, die durch die Punkte A(-4|2) und B(1|-3) verläuft.

2. Eine nach oben geöffnete Parabel p liegt symmetrisch zur y-Achse und verläuft durch die Punkte P(-4|6) und Q(2|3). Ermittle ihre Funktionsgleichung.

3. Die Gleichung einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitel S(3|5) und die Formvariable b = 2. Ermittle die Koeffizienten a und c.

4. Eine Parabel mit dem Scheitel S(-2|9) enthält den Punkt P(-7|1). Bestimme die Funktionsgleichung.

5. Eine Parabel, deren Scheitelpunkt den x-Wert 1 hat, soll durch die Punkte A(-1|0) und B(2|-1,5) gehen. Stelle die Gleichung dieser Parabel auf.

6. Stelle die Gleichung der quadratischen Funktion auf, deren Graph durch die Punkte P(0|-1), Q(2|-1), R(-2|2) verläuft.

7. Bestimme die Gleichung einer quadratischen Funktion so, daß deren Graph durch die Punkte A(-2,5|0), B(-0,5|8) und C(1,5|0) verläuft.

8. Bestimme die Gleichung einer quadratischen Funktion, bei der ihr Scheitel S(3,5|$-\sqrt{2}$) und der Parabelpunkt P(-1|$\sqrt{3}$) gegeben sind.

9. Eine Parabel besitzt die Nullstellen N_1(-17|0) und N_2(31|0). Der Scheitel liegt auf der Geraden y = 5. Bestimme die Parabelgleichung.

10. Eine Parabel mit der Symmetrieachse x = -5 enthält den Punkt P(-7|-1) und Q(-2|3). Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel ?

11. Eine Parabel der allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$ besitzt den Scheitelpunkt S(-3|4) und eine Nullstelle bei $x_0 = -1$.

a) Wo liegt die zweite Nullstelle der Parabel (Überlegung) ?

b) Bestimme die Koeffizienten a, b und c der Parabelgleichung.

12. Bestimme a und b so, daß die zugehörige Parabel $y = ax^2 + b$

a) den Punkt S(?|4) als Scheitel hat und durch den Punkt P(3|-2) läuft;

b) ihren Scheitel auf der Geraden y = 0,5x - 4 hat und die x-Achse bei x = 4 schneidet;

Scheitelform / Scheitelpunkt ermitteln und Gleichung der Symmetrieachse

13. Bestimme den Scheitelpunkt S und gib an, ob der Scheitel jeweils der höchste oder der tiefste Punkt der Parabel ist. Wie lautet jeweils die Gleichung der Parabelachse ? $x \in \mathbb{R}$

a) $y = 2x^2 + 8x$

b) $y = -0,5x^2 + 2x + 1$

c) $y = -0,25x^2 - 0,2$

d) $y = -\sqrt{2}\,x^2 - 2x + 1$

e) $0 = 3x^2 + 4y - \frac{x}{7}$

Zerlegung in Linearfaktoren

14. Zerlege, wenn möglich, in Linearfaktoren:

a) $y = x^2 - x - 6$

b) $y = 3x^2 - 6x - \frac{7}{3}$

c) $y = 3x^2 - 1,5x + 1$

d) $y = 0,5x^2 - 3x + 4,5$

Gespiegelte Parabel

15. Die Parabel $y = 2x^2 - 6x + 4$ wird

a) an der x-Achse

b) an der y-Achse

c) an der Geraden $y = 1$

d) an der Geraden $x = 1$

e) an der Geraden $y = x$

gespiegelt. Gib die Gleichung der gespiegelten Parabel an.

Nullstellen (Lösungsmenge) ermitteln

16. Berechne die Nullstelle(n) folgender Funktionen:

a) $f(x) = 3 - \frac{x^2}{3}$

b) $f(x) = (x - 1)^2 - (3x - 0,5)^2$

c) $f(x) = (x - 0,75)\,(x - 0,75) + (x - 0,75)\,(x - 0,5)$

d) $f(x) = 8 - x - 3x^2$

Vermischte Aufgaben

17. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Bestimme die Menge aller x-Werte, für die bei der Funktion f jeweils folgendes erfüllt ist:

a) $y = 2$

b) $y \geq -3$

18. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^2 - 6x - 1$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$

Bestimme diejenigen Werte für a, für die die Funktion genau zwei Nullstellen besitzt.

19. Von einer Normalparabel sind die Nullstellen $x_1 = 5$ und $x_2 = -3$ gegeben.
Weiterhin ist die Geradenschar $g_t(x) = 2x + t$ gegeben.

a) Bestimme den Funktionsterm $f(x)$ der Parabel

b) Bestimme die Schnittpunkte von $f(x)$ und $g_t(x)$ in Abhängigkeit vom Parameter t.

20. Von einer Quadratischen Funktionenschar $f_q(x)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ sind der Scheitel $(1|q)$ mit $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sowie der Punkt $A(3|0)$ $(A \in f_q(x))$ gegeben.

a) Bestimme den Funktionsterm der Schar

b) Die Funktionenschar besitzt gemeinsame Punkte. Gib einen dieser Punkte an.

c) Bestimme die Nullstellen der Funktionenschar in Abhängigkeit vom Parameter q.

Die Betragsfunktion (affine Funktion)

Klasse 11

Stelle folgende Funktionen ohne Betragsstriche dar und zeichne den Graph der Funktionen für $x \in [-4; 4]$:

1. $f(x) = |x|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

2. $f(x) = |x - 1|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

3. $f(x) = ||x| - 1|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

4. $f(x) = 0{,}5x + |x|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \frac{|x|}{x}(x+1)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6. $f(x) = \frac{x-|x|}{x}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

7. $f(x) = 0{,}5|2x - 2|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

8. $f(x) = |x + 1|+|x - 2|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Nullstellen von Funktionen

Klassen 9 - 11

Bestimme die Nullstelle(n) folgender Funktionen:

1. $f(x) = (x - 4)\,x$ mit $x \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ mit $x \in \mathbb{R}$

3. $f(x) = \sqrt{6x - x^2 - 5}$ mit $x \in [1;\, 5]$

4. $f(x) = 2^x - 8$ mit $x \in \mathbb{R}$

5. $f(x) = (x - 1)(x - 3)$ mit $x \in \mathbb{R}$

6. $f(x) = x^2 - 9x$ mit $x \in \mathbb{R}$

7. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 25}{2x - 7}}$ mit $x \in [5;\, +\infty]$

8. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

Bestimme die Nullstellen und ihre Vielfachheit:

9. $f(x) = (x + 2)^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

10. $f(x) = (x^2 + 2)^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

11. $f(x) = x^2\,(x - 2)(x + 2)^3$ mit $x \in \mathbb{R}$

12. $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$ mit $x \in \mathbb{R}$

13. $f(x) = -x^5 + 13x^3 - 36x$ mit $x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = \frac{1}{16}(5x^4 - 28x^3 + 36x^2)$ mit $x \in \mathbb{R}$

15. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 17x - 21$ mit $x \in \mathbb{R}$ (eine Nullstelle durch Probieren ermitteln)

16. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 50x$ mit $x \in \mathbb{R}$ (eine Nullstelle durch Probieren ermitteln)

Rationale Funktionen

Klasse 11

Bestimme von folgenden Funktionen die maximale Definitionsmenge, die Nullstellen und Unendlichkeitsstellen (Pole), sowie Definitionslücken und Symmetrieeigenschaften (falls vorhanden).
Skizziere den wesentlichen Verlauf der Graphen.

1) $x \mapsto \dfrac{x-2}{3-x}$

2) $x \mapsto \dfrac{x-2}{x+2}$

3) $x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$

4) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

5) $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$

6) $x \mapsto \dfrac{2x^2}{x-1}$

7) $x \mapsto \dfrac{(x-3)(x+2)^2}{x+2}$

8) $x \mapsto \dfrac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$

9) $x \mapsto \dfrac{(x+4)(x-3)}{x^2(x+5)}$

10) $x \mapsto \dfrac{x^2-9}{x^4-4x^2}$

11) $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

12) $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$

13) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2}$

14) $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x+1}$

15) $x \mapsto \dfrac{x-x^2}{x^2-1}$

16) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-2x}$

17) $x \mapsto \dfrac{x^3+x}{x}$

18) $x \mapsto \dfrac{3x^3}{(x+1)^4}$

19) $x \mapsto \dfrac{x^3-x}{x^2+4}$

20) $x \mapsto x-\dfrac{3}{x-2}$

21) $x \mapsto \dfrac{10}{x^2-2x+3}$

22) $x \mapsto \dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$

23) $x \mapsto \dfrac{x^2-x-6}{x^3+x^2-2x}$

24) $x \mapsto \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

25) $x \mapsto \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^3-6x^2-x+6}$

26) $x \mapsto \dfrac{x^3-x^2-2x}{x+2}$

27) $x \mapsto \dfrac{x^3+x^2-2x}{x^3-x^2-4x+4}$

28) $x \mapsto \dfrac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$

29) $x \mapsto \dfrac{x^4+2x^3-13x^2+10x}{2x^3+x^2-18x-9}$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

Bestimme mit Hilfe der Grenzwertsätze die folgenden Grenzwerte; es liegt jeweils der Definitionsbereich des Terms zugrunde:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} 2{,}5 =$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} =$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) =$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-2} =$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-x^{-2}\right) =$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^3} =$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-\frac{2\pi}{x^5}\right) =$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} =$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x^2}\right) =$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{4x-5} =$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x}{7x^2-3x+1} =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3} =$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2+\frac{1}{x^5}\right)\left(7-\frac{6}{x^3}\right) =$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2+10x}{x^2+5} =$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^2-4x+1}{x^3+3x+4} =$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x+1} \cdot \dfrac{6x^2-7}{x^2+4}\right) =$

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3-1}{x^2-1} \cdot \dfrac{x+1}{1+x^3}\right) =$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2+\dfrac{x-1}{1-2x}\right) =$

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2^x}{2^x} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-2^x}{2^x} =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x =$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} 3{,}8^x =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3{,}8^x =$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{0{,}6^x - 1}{1 - 0{,}6} \cdot 8 =$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} =$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^{23}}\right) =$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}} =$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4 - \frac{25}{x^2}} =$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2\sqrt{x}}{3x-\sqrt{x}} =$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} =$

32. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt{1+x^2}} =$

33. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{16x^2+25}+3x}{1-2x} =$

34. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) =$

35. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+1}{7x^2+x+2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}\right) =$

36. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\right) =$

37. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{5x^2+1} \cdot \sin 2x\right) =$

38. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\sqrt{1+\sin x}\right) =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

39. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) =$

40. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} =$

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x} =$

42. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2} =$

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x \cdot \sin\frac{1}{x}\right) =$

44. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{2^x} =$

45. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x + \sin x} =$

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3 + 2\sin x}{x} =$

47. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x + \sin x} =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

48. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x - \cos x} =$

49. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x}{x + \cos x} =$

50. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x}{\cos x - x} =$

51. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + 2x - 3(\sin x)^2}{3x - 5x^2} =$

52. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{5x^2 + 1} \cdot \sqrt{3 + \sin 2x} =$

53. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + \cos x}{3x} =$

54. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - |x|}{2|x| + 3} =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

Nicht existierende Grenzwerte (unbestimmte Divergenz)

60. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x =$

61. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cos x =$

62. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin 2x =$

63. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (3 \cdot \sin^3 x) =$

64. $\lim\limits_{x \to \infty} (x \cdot \sin x) =$

65. $\lim\limits_{x \to \infty} (2^x \cdot \sin x) =$

66. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^2 \cdot \cos x\right) =$

67. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{2 + \sin x} =$

68. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{2 + \cos x} =$

69. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{3 - \cos x} =$

70. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{4 - 2\cos 4x} =$

71. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sin x + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) =$

Grenzwerte f'(x) (h-Methode); Ableitung f'(a)

Bestimme f'(x) durch Grenzwertrechnung nach der „h-Methode“:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

1. $f(x) = 2x$
2. $f(x) = -3x$
3. $f(x) = ax$
4. $f(x) = mx + t$
5. $f(x) = 5x^2$
6. $f(x) = -0,5x^2$
7. $f(x) = x^2 + 1$
8. $f(x) = ax^2 + b$
9. $f(x) = x^2 + x$
10. $f(x) = 4x^2 - 2x$
11. $f(x) = -2x^2 - 8x + 1$
12. $f(x) = ax^2 + bx + c$
13. $f(x) = 2x^3$
14. $f(x) = -x^3$
15. $f(x) = x^3 + 5$
16. $f(x) = x^3 + x - 2$
17. $f(x) = 2\sqrt{x}$
18. $f(x) = -\frac{1}{2x}$
19. $f(x) = \frac{a}{x}$
20. $f(x) = 2\sin x + 1$

Berechne f'(0):

21. $f(x) = -3x + 8$
22. $f(x) = 0,5x^2 - 10x - 25$
23. $f(x) = -2\sin x + 3\cos x$

Berechne f'(1):

24. $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} - \frac{4}{x}$
25. $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$
26. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x}$

Funktionen, vermischte Aufgaben

Klasse 11

1. Berechne die Scheitelkoordinaten und skizziere jeweils die Parabel mit der Gleichung

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
b) $f(x) = -x^2 + 3x$
c) $f(x) = 0{,}5x^2 + x + 2$
d) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 7$

2. Zeige: Die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ hat die Scheitelkoordinaten

$$x_S = -\frac{b}{2a}; \qquad y_S = c - \frac{b^2}{4a} \qquad (a \neq 0)$$

3. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt P des Graphen von

a) $f:\ y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2;\quad x \in \mathbb{R},\quad P(0/?)$

b) $f:\ y = -\frac{1}{2}x^{-1};\quad x \in \mathbb{R}/\{0\},\quad P(-1/?)$

c) $f:\ y = \sqrt{2x};\quad x \in \mathbb{R}^+,\qquad P(2/?)$

4. a) Wie lautet die Gleichung der Normalen im Punkt $P(2/?)$ des Graphen der Funktion $f:\ y = 0{,}1x^3$?

b) Gegeben ist die Funktion $f:\ y = x^2;\quad x \in \mathbb{R}$. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck, das die Normale im Punkt $P(1/?)$ des Graphen mit beiden Koordinatenachsen einschließt ? 1 LE = 1 cm

5. Zeichne den Graphen der Funktion $f:\ y = \frac{1}{2}x + \cos x$ in $[0;\ 2\pi]$!

In welchen Kurvenpunkten ergeben sich waagerechte Tangenten ?
In welchen Punkten ist der Graph relativ zur Umgebung am steilsten ? Die Antworten sind mit Hilfe der Ableitungsfunktion f', deren Graph ebenfalls gezeichnet werden soll, zu begründen.

6. In welchen Punkten des Graphen von $f:\ y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3};\quad D_f = \mathbb{R}$ schließt die Tangente mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein ?
Wie kann man ohne Zeichnung erkennen, dass es keine Tangenten gibt, die mit der x-Achse einen negativen Winkel einschließen ?

7. Man bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f:\ y = x^3 - 2x + 1$ durch den Kurvenpunkt $P(1/?)$. Hat die Tangente mit G_f noch einen Schnittpunkt gemeinsam ? Entscheide die Frage durch probierendes Einsetzen ! Zeichne sodann Graph und Tangente in einem geeigneten Intervall, das den Ursprung enthält !

Funktionen, vermischte Aufgaben

Klasse 11

8. a) Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven mit den Gleichungen $y = 2x - 3$ und $y = x^2 + 2x - 7$?
Wie lauten die Tangentengleichungen in den Schnittpunkten ?

b) Welchen Punkt haben die Graphen von $f:\ y = \cos x + \sin x$ und $g:\ y = \sin x - 2\cos x$ in $[0;\ \pi]$ gemeinsam ?
Man berechne den Schnittwinkel in diesem Punkt !

9. Durch die Gleichung $y = ax^2 - 3x + \frac{1}{a};\quad x \in \mathbb{R}$ mit dem Parameter $a \neq 0$ ist eine Parabelschar gegeben. Wie lautet die Gleichung des geometrischen Ortes für die Scheitel aller Parabeln ?

10. Zur Schar der Funktionen $f_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2kx + 4k^2 - 4k$ mit $k \in \mathbb{R}$ als Scharparameter gehört eine Schar von Graphen G_{f_k}. Wie lautet die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte B_k, in denen die Graphen die Steigung 2 haben ?
Zeige, dass diese Kurve zur Graphenschar G_{f_k} gehört !

11. Betrachtet wird die Schar der Funktionen $f_k(x) = x + \frac{k}{x}$ mit k > 0 als Scharparameter und $D_{f_k} = \mathbb{R} / \{0\}$.

a) Ermittle den Ableitungsterm $f_k'(x)$ durch Grenzwertrechnung !

b) Wie lautet die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte der Graphenschar mit waagerechter Tangente ?

12. Welcher Bedingung müssen die Koeffizienten des Terms $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ genügen, damit der Graph der Funktion $f(x),\ D_f = \mathbb{R}$ keine waagerechten Tangenten hat ?

13. Zeige, dass sich die Graphen der Funktionen

$f:\ y = x^2 + 2x + 1;\quad x \in \mathbb{R}$ und $g:\ y = ax^2 - 0{,}5x + 1;\quad x \in \mathbb{R}$

im Punkt $S(0;?)$ für jeden Wert a orthogonal (rechtwinklig) schneiden.
Deute insbesondere den Fall a = 0 !

14. Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a:\ y = ax^2 - 2x + 1$, wobei der Scharparameter a eine beliebige reelle Zahl vertritt.

a) Für welche Belegung von a geht die Tangente in $P(1;?) \in G_{f_a}$ durch den Ursprung des Koordinatensystems ?

b) Wie lautet die Gleichung der Normalen durch P für beliebige Werte von a ?

Funktionen, vermischte Aufgaben

Klasse 11

15. Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_k: \ f_k(x) = x^2 - kx$ mit $x \in \mathbb{R}$ und den zugehörigen Graphen G_k, $k \in \mathbb{R}$.

a) Zeichne G_0 und G_2 mit 1 LE = 2 cm !

b) Zeige rechnerisch, dass sich alle Graphen G_k in genau einem Punkt schneiden !

c) Berechne allgemein die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen G_k mit dem Graphen G_p der Funktion $p: \ y = \frac{1}{2} - x^2; \quad x \in \mathbb{R}$ und trage G_p in das bereits vorliegende Koordinatensystem ein !

d) Zeige, dass alle Graphen G_k den Graphen G_p rechtwinklig schneiden !

16. Zu untersuchen ist die Schar von Funktionen $f_k: \ f_k(x) = x^2 - k|x|$ mit $k \in \mathbb{R}$ und den zugehörigen Graphen G_k.

a) Bestimme die Nullstellen von f_k (Fallunterscheidung !) und zeichne die zu k = 1 und k = -1 gehörigen Graphen G_1 und G_{-1} !   1 LE = 2 cm

b) Wie muss k gewählt werden, damit der Graph G_k an der Stelle $x_0 = 0$ einen Knick um 90° erfährt ?

c) Bestimme rechnerisch in Abhängigkeit von k die Anzahl der Punkte, die der Graph G_k mit der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten gemeinsam hat !

Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

Aufgaben ab Seite 4

Grundlagen und Begriffe der Differenzialrechnung

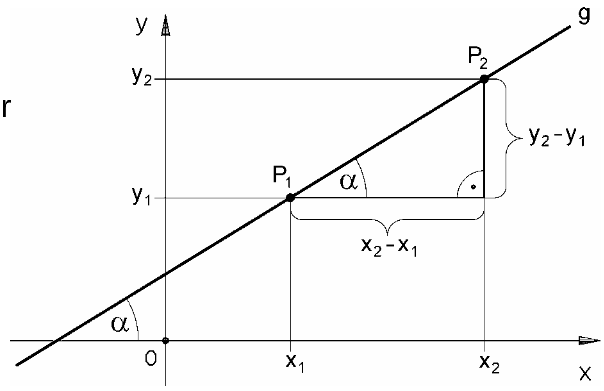
Die Zeichnungen und Erklärungen sind etwas ausführlicher als notwendig um verschiedene Schreibweisen und Darstellungen aufzuzeigen.

Steigung einer Geraden:

Es seien $P_1(x_1\,|\,y_1)$ und $P_2(x_2\,|\,y_2)$ zwei Punkte der Geraden g mit $x_1 \neq x_2$.

Dann gilt für die Steigung m: $\boxed{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

Der Steigungswinkel ist: $\boxed{m = \tan\alpha}$



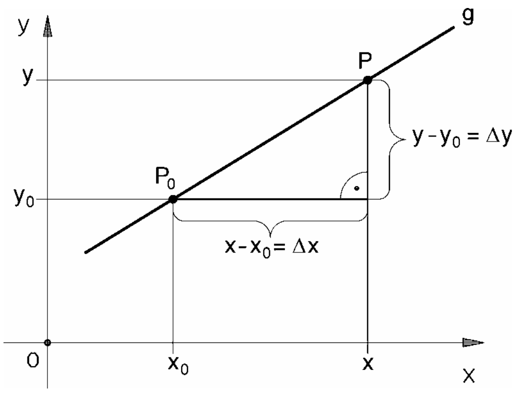
Differenzenquotient:

Ist der Funktionsgraph eine Gerade, so ist ihre Steigung in jedem beliebigen Punkt $P_0(x_0\,|\,y_0)$ durch den Faktor m festgelegt.

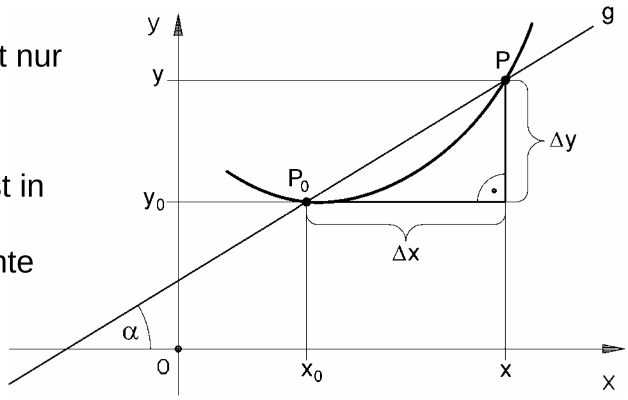
Der Quotient aus der Differenz der y-Werte und der x-Werte bezüglich der Stelle x_0 nennt man

Differenzenquotient:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m}$$



Der Begriff des Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ist nicht nur bei Geraden definiert, sondern wird auch bei gekrümmten Graphen angewendet.
Diese Verallgemeinerung des Steigungsbegriffs ist in nebenstehender Skizze dargestellt.
Die Sekante durch P_0 und P ist die bereits bekannte Gerade.
Die Steigung aller Sekanten durch $P_0(x_0\,|\,y_0)$ entspricht jeweils dem Differenzenquotienten bezüglich der Stelle x_0.



Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

Die Gleichung des Differenzenquotienten läßt sich auch wie folgt schreiben:

Differenzenquotient:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

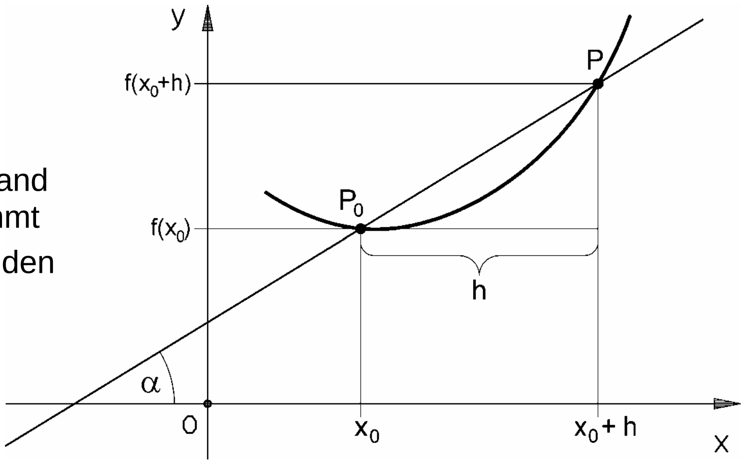
Nebenbei bemerkt:
Die Sekantensteigung ist identisch mit der Geradensteigung:

$$\boxed{m_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha}$$

Differenzialquotient oder 1. Ableitung oder Steigung der Tangente

Wird für den Abstand $\Delta x = x - x_0$ zur Vereinfachung die Variable h eingesetzt, dann hat der Differenzenquotient folgende Form:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$



Verringert man nun - gedanklich - den Abstand $h\,(=\Delta x)$ so daß dieser den Wert Null annimmt (man schreibt auch $x \to x_0$), so erhält man den Grenzwert des Differenzenquotienten.
Dieser Grenzwert heißt

Differenzialquotient

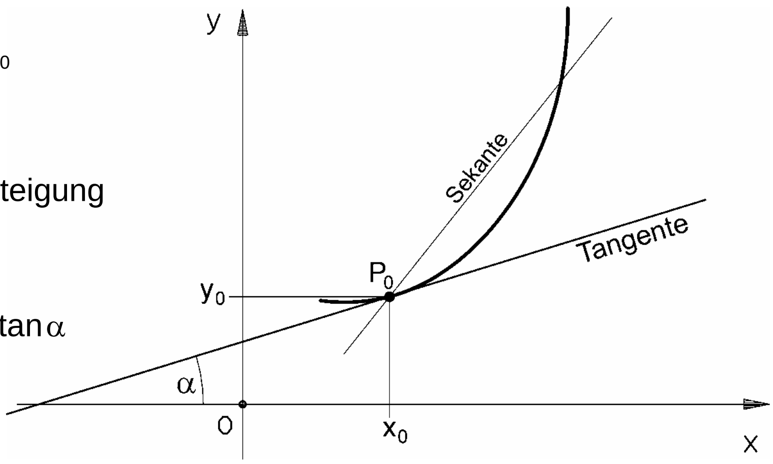
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \quad \text{mit } |h| > 0$$

oder

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \text{mit } x \neq x_0$$

Der Differenzialquotient ist zugleich die Steigung der Tangente im Punkt $P_0\left(x_0 \mid y_0\right)$

$$m_T = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan\alpha$$



Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

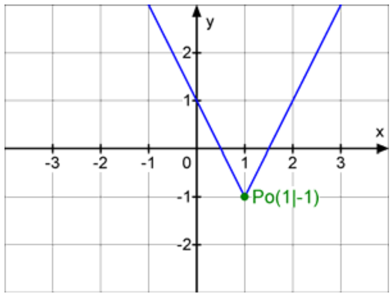
Definitionen:

Der Grenzwert des Differenzenquotienten heißt Differentialquotient oder 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

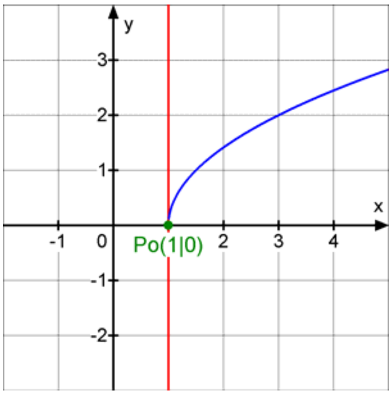
Die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0 ist die Steigung des Graphen G_f im Punkt $P_0\left(x_0 \mid y_0\right)$.
Für den Neigungswinkel α der Tangente in diesem Punkt gilt: $\tan\alpha = f'(x_0)$

Sonstiges:

Es könnte sein, daß es in P_0 keine eindeutige Tangente an den Graphen gib. Ein Beispiel ist in der Skizze rechts dargestellt.
In diesem Fall existiert auch kein Grenzwert.



Für den Fall, daß die Tangente senkrecht verläuft (siehe nebenstehende Skizze), ist die Steigung der Tangente nicht definiert.
Auch in diesem Fall existiert kein Grenzwert.



Formeln:

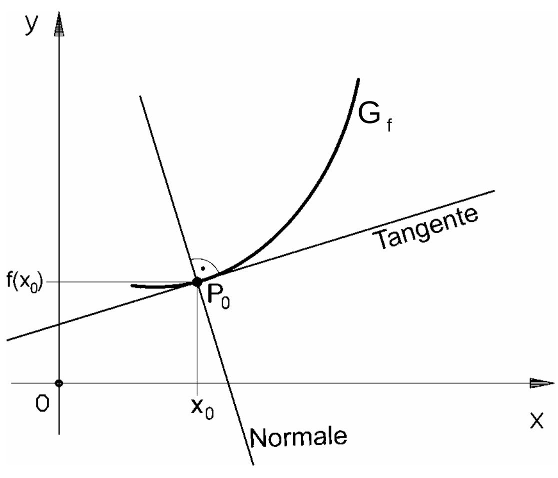
Nachfolgende Formeln sind hier nur der Vollständigkeit angegeben. In den Lösungen zu den Aufgaben werden sie nicht verwendet.

Gleichung der Tangente von G_f an der Stelle x_0:

$$\boxed{y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)}$$

Gleichung der Normale von G_f an der Stelle x_0:

$$\boxed{y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)} \quad \text{falls } f'(x_0) \neq 0$$



Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

Aufgaben

1. Bestimme jeweils den Neigungswinkel der Tangente an die Parabel $y = x^4$ in den folgenden Kurvenpunkten (2 Dezimalstellen):

a) $R(0,8\,|\,?)$ b) $S(-1\,|\,?)$ c) $T(0\,|\,?)$

2. Gegeben ist die Parabel $y = 0,5x^2$. Berechne die Koordinaten der Berührpunkte von Tangenten die folgende Neigungswinkel haben (2 Dezimalstellen):

a) $62°$ b) $-54,12°$ c) $0,01°$

3. Bestimme die Gleichung der Tangente an die Parabel $y = 2x^2$, die

a) parallel ist zur Geraden $g:\ 2x + 1 - y = 0$.

b) zur Geraden $h:\ 2y - 3x + 6 = 0$ orthogonal angeordnet ist.

4. Gegeben sei die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = -x^2 + 6x - 5,\quad x \in \mathbb{R}$

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $P(3\,|\,4)$.

b) Bestimme die Gleichung der Tangente t_2 und der Normalen an den Graphen von f im Punkt $Q(1\,|\,0)$.

c) Bestimme den Schnittwinkel der Tangenten t_1 und t_2.

5. Bestimme die Tangenten an die Parabel $y = x^2 - 2$, die sich im Punkt $S(0\,|\,-4,25)$ schneiden.

6. Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto x^3$ im Berührpunkt $A_0(-1\,|\,-1)$.
Die Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechne die Fläche des Dreiecks.

7. Die Tangente an den Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto x^3$ im Berührpunkt $R(1\,|\,1)$ schneidet den Graphen im Punkt Q. Berechne die Gleichung der Tangente sowie die Koordinaten das Schnittpunktes Q.

8. Bestimme für den Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto \sqrt{x} - 2,\quad x \in \mathbb{R}_0^+$

a) den Neigungswinkel der Tangente im Punkt $B(4\,|\,?)$.

b) die Koordinaten jenes Kurvenpunktes P, für den die Tangente an f unter 60° gegen die x-Achse geneigt ist.

Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

9. In welchen Punkten des Graphen mit der Gleichung $f:\ y=-\frac{1}{x}$ sind die Tangenten parallel zur Geraden $g:\ 0{,}5x-y=0$?

10. Bestimme im Schnittpunkt der beiden Graphen mit den Gleichungen $y=\sqrt{x}\ ;\ x\in\mathbb{R}_0^+$ und $y=\frac{1}{x}$ die Tangenten t_1 und t_2 (an den jeweiligen Graph).

11. Berechne den Neigungswinkel φ gegen die x-Achse der Tangente im Punkt $P(1\,|\,?)$ an die Sinuskurve mit der Gleichung $y=\sin x$.

12. Die Graphen der Funktionen $f:\ x\mapsto\sin x;\ x\in[-0{,}5;\ 2]$ und $g:\ x\mapsto\cos x;$ $x\in[-0{,}5;\ 2]$ schneiden sich im Punkt S. Bestimme jeweils den spitzen Winkel den die beiden Tangenten im Punkt S mit der der x-Achse bilden.

13. Bestimme die beiden waagerechten Tangenten am Graph der Funktion $h:\ x\mapsto x+2\sin x;\ D_f=[0;\ 2\pi]$

14. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $P(2\,|\,?)$ des Graphen von $f:\ x\mapsto 0{,}5(x-1)^2+1$?

15. An den Parabelbogen $y=-0{,}4(x-2)^2-1{,}5$ soll vom Punkt $R(0\,|\,5)$ ausgehend eine Tangente so gelegt werden, daß ihre Steigung einen negativen Wert einnimmt. Bestimme die Gleichung der Tangente und die Koordinaten des Berührpunktes B_0.

16. In welchen Punkten des Graphen von $f:\ x\mapsto\frac{1}{3}x^3-x^2+x+\frac{2}{3};\quad D_f=\mathbb{R}$ schließt die Tangente mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein ?

Wie ist ohne Zeichnung erkennbar, daß es keine Tangenten gibt, die mit der x-Achse einen negativen Winkel einschließen ?

17. Berechne den Schnittwinkel der Graphen folgender Funktionen:

$f:\ x\mapsto 8x^{-2};\quad x\in\mathbb{R}^+$ und $g:\ x\mapsto 0{,}5x^2;\quad x\in\mathbb{R}^+$

Gymnasium

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 1

Autor: Dr. Georg Elsting

1. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = 0$ als einfache Nullstelle und $x = -4$, $x = 2$, $x = 3$ als einfache Polstellen.
Skizzieren Sie den Graphen.

2. Nennen Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = -3$ als einfache Nullstelle, $x = -2$ als doppelte Polstelle und mit der x-Achse als eine Asymptote. Skizzieren Sie den Graphen.

3. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = 0{,}1 \cdot \left(x^3 - e^{x^3}\right)$

b) $f(x) = e^{\frac{x}{e} - e^x}$

4. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ an der Stelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar ist.

5. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren annähernd den Wert $\sqrt[3]{2}$ als Nullstelle der Funktion $x^3 - 2$.

6. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = e^{\frac{\cos 2x - 3\cos x + 2}{2}} - 1{,}5$ auf globale Extrema im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

7. Geben Sie ein Beispiel für eine ganzrationale Funktion $f(x)$, die an den Stellen $x = 1$, $x = 3$ lokale Minima und an den Stellen $x = 2$, $x = 4$ lokale Maxima hat.

8. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + ax$ auf Terrassenpunkte.

Gymnasium

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 2

9. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x=0$ als Nullstelle, mit $x=-0{,}5$ als Polstelle ohne Vorzeichenwechsel und mit $x=0{,}5$, $x=1$ als Polstellen mit Vorzeichenwechsel. Skizzieren Sie den Graphen.

10. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $y=-2x+1$ als eine schräge Asymptote und mit der y-Achse und den Geraden $x=-1$, $x=1$ als senkrechte Asymptoten. Skizzieren Sie den Graphen.

11. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x)=0{,}5x^3+\cos x^3$

b) $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}$

12. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x)=|\sin x|$ an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar ist.

13. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren annähernd den Wert $\sqrt[4]{3}$ als Nullstelle der Funktion x^4-3.

14. Untersuchen Sie die Funktion $f(x)=\dfrac{x^6-x^3+1}{-x^6+x^3+1}$ auf globale Extrema im Intervall $[0;1]$.

15. Finden Sie Stammfunktionen für den Sinus hyperbolikus $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ und für den Cosinus hyperbolikus $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

16. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x)=0{,}2x^5-x+a$ für keine reelle a fünf Nullstellen hat.

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 3

17. Geben Sie ein Beispiel von einer Funktion die $x = 0$ als Nullstelle, $x = \pm 0{,}5$ als Polstellen mit Vorzeichenwechsel und keine weiteren Null- und Polstellen hat und dabei <u>keine gebrochen-rationale</u> Funktion ist. Skizzieren Sie den Graphen.

18. Geben Sie ein Beispiel von einer im Intervall $[1;\, \infty[$ definierten Funktion, deren Term eine tan(x) Funktion enthält, und deren Graph die Gerade $y = x$ als eine schräge Asymptote hat. Skizzieren Sie den Graphen.

19. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = 32x^3 - \ln\left(1 + 64x^3\right),\ x > -0{,}25$

b) $f(x) = \dfrac{1 + x^3}{\sqrt{1 + x^6}}$

20. Gegeben ist, dass die überall differenzierbare Funktion $y = f(x)$ auf der ganzen Zahlengeraden gerade ist, d. h., dass $f(-x) = f(x)$ für ein beliebiges x.
Beweisen Sie, dass die für die Ableitung $f'(x)$ gilt $f'(-x) = -f'(x)$ für ein beliebiges x.
(D. h., dass die Ableitung $y = f'(x)$ eine ungerade Funktion ist.)

21. Beweisen Sie, dass die Gleichung $e^{-x} - 0{,}3x = 0$ eine einzige Nullstelle hat und berechnen Sie diese mit dem Newton-Verfahren und mit dem Startwert $x = 0$.

22. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 3\cos\left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\right) + 3x$ auf globale Extrema im Intervall $\left[0;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

23. Beweisen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens, dass $\cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

24. Beweisen Sie, dass für die Funktion $f(x) = e^{-\sqrt{2}\cdot\sin x} + \sqrt{2}\cdot\sin x - 1$ gilt:
$f'(x) = -\sqrt{2}\cdot\cos x\cdot f(x) + \sin 2x$.

Gymnasium

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 4

25. a) Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei $x = 2k + 1$ und mit Polstellen ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 2k$, $k = 1, 2, 3, ..., n$. Skizzieren Sie den Graphen für n = 2.

b) Geben Sie ein Beispiel von einer (nicht gebrochen-rationalen) Funktion mit Polstellen ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

26. Für welches a und b gibt es einen Punkt P, wo die Graphen der Funktionen

$f(x) = \cos x$ und $g(x) = \dfrac{(x - a)^3}{3} + x + b$ eine gemeinsame Tangente haben ?

27. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = \dfrac{(x - 1)^3}{3} + \dfrac{1}{4(x - 1)^4}$, $x \neq 1$

b) $f(x) = \tan x - \dfrac{4x}{3}$, $x \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

28. Bei welchem a hat die Funktion $f(x) = \cos^2 x + a \cdot x$ Extremstellen ? Deren Graph Terrassenpunkte ?

29. Beweisen Sie, dass die Gleichung $5^x - x^2 - 2 = 0$ eine einzige Nullstelle im Intervall $[0; 1]$ hat und berechnen Sie die mit dem Newton-Verfahren mit dem Startwert $x = 1$.

30. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \cos x - \sin x + \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot x = 0$ auf globale Extrema im Intervall $[0;\ 2\pi]$.

31. Beweisen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens, dass die ganzrationale Funktion $f(x) = x^{10} + x^9 - 1{,}8x^8 - 0{,}2$ genau eine positive Nullstelle hat.

32. Beweisen Sie, dass für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^4} + 2\sqrt{\dfrac{x}{5}}$ gilt: $\left(x \cdot f'(x) + 4 \cdot f(x)\right)^2 = 16{,}2x$.

Realschule

Parabeln - Grundlagenaufgaben

Klasse 9 oder 10

1. Die Parabel $y = x^2$ wird durch die angegebenen Vektoren parallel verschoben. Wie lautet die Gleichung der verschobenen Parabel?

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

2. Gib die Koordinaten der Scheitel folgender Parabel an. Bringe dazu die Funktionsgleichung auf die Scheitelform. Gib auch die Gleichung der Symmetrieachse an.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^2 + 6x + 5$ c) $y = x^2 + 4$

d) $y = x^2 - 8x$ e) $y = x^2 + 5x + 3{,}25$

3. Bestimme die Gleichung der Normalparabel mit den folgenden Scheitelpunktskoordinaten und Öffnung der Parabel nach oben bzw. unten. Gib die Funktionsgleichung jeweils in Normalform an.

a) $S_1\left(-2 \mid 6\right)$, Graph nach unten geöffnet,

b) $S_2\left(-4 \mid -5\right)$, Graph nach oben geöffnet,

c) $S_3\left(\frac{5}{6} \,\middle|\, -\frac{2}{3}\right)$, Graph nach unten geöffnet,

4. Eine nach oben geöffnete Normalparabel hat ihren Scheitel auf der y-Achse und verläuft durch den angegebenen Punkt P. Bestimme jeweils die Gleichung der Parabel.

a) $P_1\left(-1 \mid 0{,}5\right)$ b) $P_2\left(4 \mid 16\right)$ c) $P_3\left(-2 \mid -5\right)$

5. Parabeln der Form $y = a x^2$ verlaufen durch die angegebenen Punkte. Gib den Wert der Variablen a an.

a) $P\left(-0{,}5 \mid -0{,}125\right)$ b) $Q\left(3 \mid -90\right)$ c) $R\left(-\frac{1}{5} \,\middle|\, \frac{3}{25}\right)$

6. Ermittle die Scheitelkoordinaten folgender Parabeln durch quadratische Ergänzung.

a) $y = 2x^2 + 8x + 6$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 4$ c) $y = -x^2 - 4x - 5$

d) $y = 3x^2 - 9x$ e) $y = -a x^2 - b x + c$

7. Gib die Definitions- und die Wertemenge folgender Funktionen an. Bestimme jeweils die Gleichung der Symmetrieachse des Graphen.

a) $y = 0{,}75x^2 + 6x + 11{,}5$

b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$

c) $y = -0{,}5x^2 - 0{,}5x + 0{,}375$

Parabeln - Grundlagenaufgaben

Klasse 9 oder 10

8. Die Parabeln mit den folgenden Gleichungen sollen mit dem angegebenen Vektor parallel verschoben werden. Gib jeweils die Gleichung der Bildparabel an.

a) $p_1: y = 0{,}8x^2;\ \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $p_2: y = -\frac{1}{6}x^2;\ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $p_3: y = -x^2;\ \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

9. Parabeln der Form $y = ax^2 + bx + c$ verlaufen durch die Punkte A und B und haben den Scheitel S. Bestimme die Werte der Variablen a, b und c.

a) $a = -3;\quad S(4 \mid 2)$

b) $a = 2;\quad b = c;\quad A(4 \mid 0)$

c) $a = -2;\quad A(0 \mid 6);\quad B(3 \mid 2)$

10. Überprüfe rechnerisch, ob die Punkte A, B und C auf dem Graphen der Parabel $y = x^2 + 0{,}5$ liegen.

a) $A\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid -1\right)$ b) $B\left(\frac{2}{\sqrt{2}} \mid 2{,}5\right)$ c) $C\left(-0{,}1 \mid \frac{51}{100}\right)$

11. Überprüfe, ob gilt $A \in p$.

a) $p_1:\ y = -0{,}5x^2 - 4x - 4;\quad A_1(2 \mid -13)$

b) $p_2:\ y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 5;\quad A_2(-3 \mid -2)$

c) $p_3:\ y = 2{,}5x^2 - 5;\quad A_3(17 \mid 725)$

Parabeln - Grundlagenaufgaben

Klasse 9 oder 10

12. Gegeben ist die Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 + 6x + 9$

a) Bestimme rechnerisch den Scheitel, die Wertemenge und die Gleichung der Symmetrieachse.

b) Zeichne die Parabel in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: $7 \leq x \leq 1; \quad -1 \leq y \leq 10$

c) Die Punkte $A(-1|4)$ und $B(-6|9)$ sind zusammen mit den Punkten $C_n \in p$ Eckpunkte von Dreiecken ABC_n. Zeichne das Dreieck ABC_1 für $x_1 = -5$.

d) Entnimm der Zeichnung, für welche Werte von x Dreiecke ABC_n entstehen können und gib diese Werte (Intervall) an.

e) Berechne den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n.

f) Für welchen x-Wert ist der Flächeninhalt maximal? Gib diesen Wert A_{max} an.

13. Die Parabel p hat die Gleichung $y = x^2 - 2x - 2$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) Berechne die Koordinaten des Scheitelpunktes S von der Parabel p und zeichne sodann den Graph von p in ein Koordinatensystem.

b) Die Punkte $C_n\left(x \,\middle|\, x^2 - 2x - 2\right)$ auf der Parabel p bilden zusammen mit den Punkten $A(-2|-2)$ und $B(1|-4)$ Dreiecke ABC_n.
Zeichne die Dreiecke ABC_1 für $x = 0$ und ABC_2 für $x = 3$ in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung: $-3 \leq x \leq 5; \quad -5 \leq y \leq 4$.

c) Zeige durch Rechnung, dass sich der Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n wie folgt darstellen lässt:
$A(x) = (1{,}5x^2 - 2x + 2)\,\text{FE}$

d) Das Dreieck ABC_0 hat den kleinsten Flächeninhalt A_{min}. Berechne den kleinstmöglichen Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n und die Koordinaten von C_0.

Parabeln - Grundlagenaufgaben

Klasse 9 oder 10

14. Gegeben ist die Normalparabel p. Die Symmetrieachse s dieser Parabel hat die Gleichung $x = -4$. Der Punkt $P(-2\,|\,2)$ liegt auf der Normalparabel p.

a) Bestimme rechnerisch die Scheitelform der Parabel p und zeige anschließend, dass sich die Parabel durch die Gleichung $y = x^2 + 8x + 14$ darstellen lässt.

b) Die Punkte $R_n\left(x \,\middle|\, x^2 + 8x + 14\right)$ auf der Parabel p bilden zusammen mit den Punkten $P(-2\,|\,2)$ und $Q(-7\,|\,7)$ Dreiecke PQR_n.
Zeichne die Parabel p und das Dreieck PQR_1 für $x = -5$ in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung: $-8 \le x \le 1$; $-3 \le y \le 8$

c) Entnimm der Zeichnung, für welche Werte von x Dreiecke PQR_n entstehen können und gib diesen Bereich an.

d) Zeige durch Rechnung, dass sich der Flächeninhalt A(x) der Dreiecke PQR_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte R_n wie folgt darstellen lässt:
$A(x) = \left(-2{,}5x^2 - 22{,}5x - 35\right)\,\text{FE}$

e) Das Dreieck PQR_0 hat den größten Flächeninhalt A_{max}. Berechne den größtmöglichen Flächeninhalt der Dreiecke RQR_n und die Koordinaten von R_0.

